

Kombinationer ved udtrækning

Beregningen af antallet af forskellige rækkefølger som n elementer kan forekomme i kunne gøres ved fakultet ved $n!$. Denne beregning kan nu anvendes til også at undersøge antallet af forskellige kombinationer, der kan forekomme ved at udtrække et mindre antal elementer ud af en større mængde af elementer.

Betragter man f.eks. et kortspil på 52 hvor der i en bestemt rækkefølge udtrækkes 5 kort. Til første kort er der således 52 muligheder, andet kort 51 muligheder, tredje kort 50 muligheder osv. så det samlede antal af forskellige muligheder beregnes som:

52 · 51 · 50 · 49 · 48 = 311 875 200

For at generalisere denne beregning på en form der også nemt kan opskrives ved udtræk af mange kort anvendes fakultetsberegningen 52!:

52! = 52 · 51 · 50 · 49 · 48 · 47 · 46 · ... · 1

Det ses her at 52! indeholder den ønskede beregning 52 · 51 · 50 · 49 · 48 men at denne ganges med 47! som også kan skrives som (52 – 5)! hvor man trækker antallet af udtræk 5 fra det samlede antal på 52. Dette vil sige at hvis man dividerer 52! med (52 – 5)! vil man få det korrekte resultat:

52! / (52 – 5)! = 52 · 51 · 50 · 49 · 48 · 47 · 46 · ... · 1 / 47 · 46 · ... · 1 = 52 · 51 · 50 · 49 · 48 = 311 875 200

Det skal her understreges at der er tale om antallet af forskellige udtræk i *bestemt* rækkefølge hvilket f.eks. vil sige at de to følgende udtrækninger betragtes som forskellige selvom de indeholder de samme kort men i *forskellig* rækkefølge:

(♠1, ♠2, ♠3, ♠4, ♠5) ≠ (♠2, ♠1, ♠3, ♠4, ♠5)

Beregningen kan nu generaliseres til et udtræk af r elementer ud af en mængde på n elementer hvor antallet af forskellige udtræk i en *bestemt* rækkefølge (permutationer) kan beregnes ved:

R(n, r) = n! / (n – r)!

Bemærk her at såfremt alle elementerne udtrækkes dvs. hvis $r = n$ vil nævneren give 0! = 1 og formlen reduceres til $n!$ som netop var måden man skulle beregne hvor mange forskellige rækkefølger hvori man kunne arrangere n elementer.

I ovenstående eksempel var tilfældet at rækkefølgen af udtrækket var nok til at betragte to udtræk som forskellige, men i de fleste kortspil er det nok sådan at rækkefølgen hvori man får sine 5 kort er ligegyldig. Dette vil f.eks. sige at de to følgende udtrækninger betragtes som *ens* selvom de indeholder de samme kort men i forskellig rækkefølge:

(♠1, ♠2, ♠3, ♠4, ♠5) = (♠2, ♠1, ♠3, ♠4, ♠5)

Der gælder altså at de 5! = 120 forskellige rækkefølger som de 5 kort kan forekomme i vil blive betragtet som det samme udfald. Hvis man derfor anvender ovenstående formel for antallet af permutationer i dette eksempel hvor rækkefølgen på udtrækket er ligegyldigt har man altå regnet 5! gange for meget. Så beregningen af antallet af forskellige udtræk på 5 kort ud af 52 hvor rækkefølgen er ligegyldig kan gøres ved:

R(52, 5) / 5! = 52! / (5! · (52 – 5)!) = 2 598 960

Generaliseret skal man altså, for at normalisere for alle de forskellige rækkefølger som udtrækket kan forekomme i, dividere antallet af forskellige udtræk i en bestemt rækkefølge (permutationer) $R(n, r)$ med antallet af forskellige rækkefølger som de r elementer kan forekomme på $r!$. Antallet af forskellige udtræk i en *ligegyldig* rækkefølge (kombinationer) $K(n, r)$ kan således beregnes ved:

K(n, r) = R(n, r) / r! = n! / (r! · (n – r)!)

De to beregninger for antallet af forskellige muligheder som en udtrækning af r elementer ud af en mængde på n elementer kan ske på kan opsummeres i følgende sætning.

Antal kombinationer ved udtrækning

Udtrækning af r elementer ud af en mængde på n elementer kan gøres på følgende antal måder alt afhængig om rækkefølgen er betydende:

Hvis udtrækket skal være i en *bestemt* rækkefølge (permutationer) beregnes antallet af forskellige udtræk ved:

R(n, r) = n! / (n – r)!

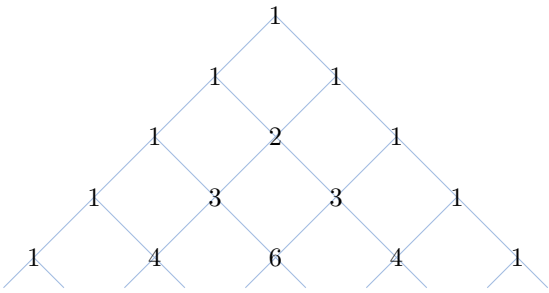
Hvis udtrækket skal være i en *ligegyldig* rækkefølge (kombinationer) beregnes antallet af forskellige udtræk ved:

K(n, r) = n! / (r! · (n – r)!)

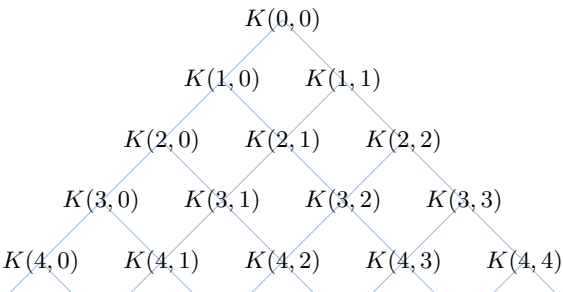
Pascals trekant

Antallet af kombinationer i en ligegyldig rækkefølge $K(n, r)$ er altså afhængig af de to parametre n og r og når man beregner talværdien af $K(n, r)$ for forskellige værdier af n og r ses en bemærkelsesværdi struktur, der kendes som *Pascals trekant*.

Pascals trekant er konstrueret i lag ved at starte med talværdien 1 i toppen af trekanten og derefter udregne næste lag ved at lægge de to talværdier fra foregående lag i trekanten sammen som illustreret på figuren nedenfor.



Det viser sig, at Pascals trekant netop angiver talværdierne af $K(n, r)$ når man følger strukturen der er illustreret nedenfor.



Ud fra strukturen på Pascals trekant kan man se, at den er symmetrisk med $K(n, r) = 1$ hvis $r = 0$ eller $r = n$ at det maksimale antal kombinationer er når $r = \frac{1}{2}n$.