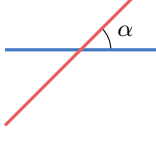


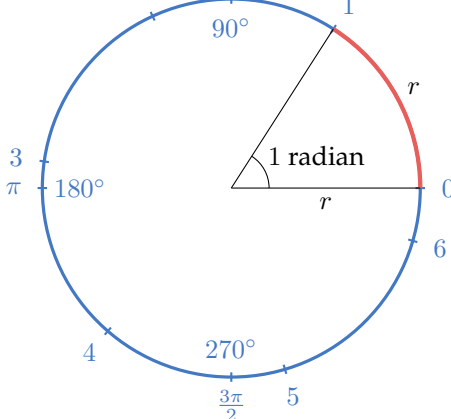
Vinkler

Når to linjestykker skærer eller møder hinanden i et punkt opstår der naturligt et mål for hvor skæve linjestykkerne står på hinanden. Dette mål kaldes en *vinkel* og er illustreret nedenfor hvor den spidse vinkel, der er udspændt af de to linjestykker, er navngivet α .



I praksis måles vinkler i mange forskellige enheder alt efter hvad der er hensigtsmæssigt for præcisionen af den konkrete anvendelse, men essentielt handler det om at inddеле en hel omgang i et bestemt antal mindre enheder. Af forskellige typer af enheder på vinkler kan nævnes: En *tørn* (1 tørn per omgang), en *sestant* (6 sekstanter per omgang), et *bue-sekund* (1 296 000 bue-sekunder per omgang), men de to mest anvendte er hhv. *grader* (360 grader per omgang) og *radianer* ($2\pi \approx 6.28$ radianer per omgang).

En radian er defineret som den vinkel, der udspændes af en cirkelbue der er 1 radius lang som vist på figuren nedenfor.



Som bekendt er forholdet mellem en cirkels omkreds O og radius r er givet ved: $\frac{O}{r} = 2\pi \approx 6.28$. Dette betyder derfor, at der er netop 2π radianer på en omgang.

En vinkel der udgør $\frac{1}{4}$ omgang kaldes for en *ret vinkel* hvilket ift. grader svarer til 90° eller ift. radianer svarer til $\frac{\pi}{2}$. En vinkel der er mindre en den rette vinkel kaldes for en *spids vinkel* og en vinkel der er større end den rette vinkel kaldes for en *stump vinkel*.

Da mange anvendelser bruger forskellige enheder for vinkler er der ofte behov for at kunne omregne enheder for vinkler for at kunne anvende de matematiske teorier i praksis. Omregning mellem to enheder kan gøres ved at gange med forholdet mellem de to enheder. Til eksempel kan 1 radian omregnes til grader ved:

$$1 \text{ [rad]} \cdot \frac{360 \text{ [grad]}}{2\pi \text{ [rad]}} \approx 57.3 \text{ [grad]}$$

Det ses altså at omregningsfaktoren fra radianer til vinkler er ca. 57.3° pr. radian. Omregningen fra en vinkel angivet i radianer r til den tilsvarende vinklen angivet i grader g , og omvendt, kan generaliseres til sætningen:

Grader og radianer

En vinkel, der er angivet i radianer r kan omregnes til den tilsvarende værdi angivet i grader g ved:

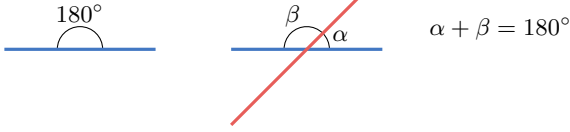
$$g = r \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} \quad \text{eller} \quad g \approx 57.3^\circ \cdot r$$

En vinkel, der er angivet i grader g kan omregnes til den tilsvarende værdi angivet i radianer r ved:

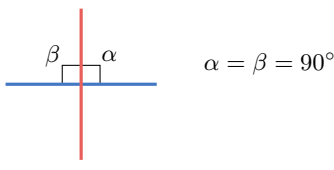
$$r = g \cdot \frac{2\pi}{360^\circ} \quad \text{eller} \quad r \approx \frac{g}{57.3^\circ}$$

Vinkelsummen over en ret linje

For ethvert punkt på en linje danner linjen i sig selv en vinkel på en halv omgang lig med 180° eller π radianer. Såfremt linjen skæres af en eller flere linjer vil vinkelsummen af de dannede vinkler udgøre 180° som illustreret i figuren nedenfor.

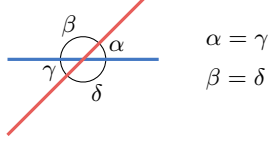


I tilfælde af at vinklerne α og β er lige store vil begge vinkler udgøre halvdelen af de 180° hvilket vil sige at de begge er rette vinkler på 90° .



Princippet om modstående vinkler

Når to rette linjer skærer hinanden, danner disse linjer fire vinkler imellem sig, så hvert par af modstående vinkler er lige store. Princippet er illustreret i figuren nedenfor.



Dette kan ses som en følge af, at vinkelsummen skal være opfyldt for begge linjers tilfælde. Dette giver de to ligninger for vinklerne på oversiden hhv. af den blå og den røde linje:

$$\alpha + \beta = 180^\circ \quad \text{og} \quad \beta + \gamma = 180^\circ$$

Hvis begge ligninger skal være opfyldt, må vinkel α og vinkel γ være lige store fordi, hvis man lægger vinkel β til hhv. α eller γ så giver det 180° i begge tilfælde. Man kan altså udlede at:

$$\alpha = \gamma$$

For vinklerne på undersiden af hhv. den blå og den røde linje kan man opstille to tilsvarende ligninger ved:

$$\alpha + \beta = 180^\circ \quad \text{og} \quad \alpha + \delta = 180^\circ$$

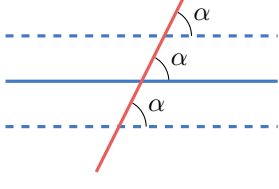
Ved samme argument som for vinklerne på oversiden kan man af de to ligninger udlede at:

$$\beta = \delta$$

Idet α er den modstående vinkel til γ og ligeledes β er den modstående vinkel til δ kan det konstateres at hvert par af modstående vinkler er lige store.

Princippet om parallelforskydning

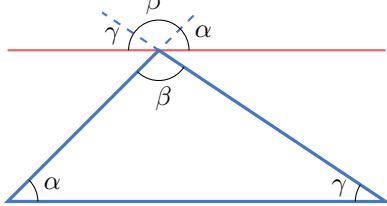
For en givet linje vil alle parallelle linjer, der skærer linjen, udspænde den samme vinkel. Dette muliggør at man kan *parallelforskyde* en linje uden at det påvirker vinklen til andre skærende linjer som illustreret i figuren nedenfor.



Princippet om parallelforskydning er et vigtigt redskab i geometriske beviser og opgaveløsning, som f.eks. at kunne bevise vinkelsummen i en trekant.

Vinkelsummen i en trekant

Vinkelsummen i en trekant kan findes ved at parallelforskyde grundlinjen op til trekantens spids, som vist på figuren nedenfor.



Summen af trekantens vinkler α , β og γ er således den samme som vinkelsummen over en ret linje, altså 180° , hvilket kan skrives som:

Vinkelsummen i en trekant

For en trekant der har vinklerne α , β og γ gælder der at summen af vinklerne er lig med 180° :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$