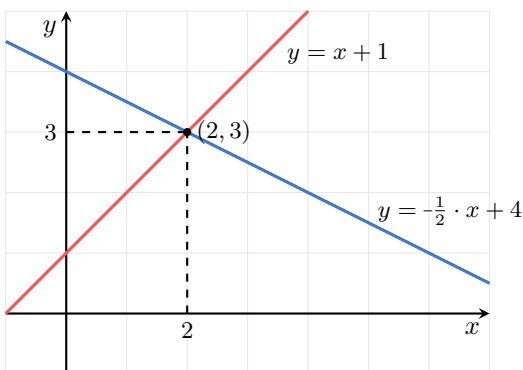


Linjers skæringspunkter

At bestemme skæringspunktet mellem to rette linjer gælder om at bestemme et fælles punkt der ligger på begge linjer. Dette er illustreret i figuren nedenfor hvor den blå og den røde linje har netop ét fælles punkt – et *skæringspunkt* – i punktet $(x, y) = (2, 3)$.



I figuren er hhv. den blå linje L_1 og den røde linje L_2 givet ved ligninger, der kan skrives på den generelle form for en ret linje $y = a \cdot x + b$ ved:

$$L_1 : \quad y = x + 1$$

$$L_2 : \quad y = -\frac{1}{2} \cdot x + 4$$

For at bestemme skæringspunktet algebraisk, dvs. ud fra de to ovenstående ligninger, antager man først, at der findes et sådan skæringspunkt ved (x_p, y_p) . Der gælder altså at koordinatsættet opfylder begge ligninger:

$$y_p = x_p + 1 \quad \wedge \quad y_p = -\frac{1}{2} \cdot x_p + 4$$

Da begge ligninger har samme talværdi y_p på venstresiden må højresiden af de to ligninger også repræsentere samme talværdi og man kan derfor sætte disse lig med hinanden i en ny ligning:

$$x_p + 1 = -\frac{1}{2} \cdot x_p + 4$$

Denne ligning har nu kun én ukendt værdi som man kan bestemme ved at isolere x_p på venstresiden af ligningen:

$$\begin{aligned} x_p + 1 &= -\frac{1}{2} \cdot x_p + 4 &\Leftrightarrow & x_p + \frac{1}{2} \cdot x_p = 4 - 1 \\ &&\Leftrightarrow & 1.5 \cdot x_p = 3 \\ &&\Leftrightarrow & x_p = 2 \end{aligned}$$

Det er herved bestemt, at x -værdien for skæringspunktet er $x_p = 2$. Den tilsvarende y -værdi for skæringspunktet er y_p kan nu bestemmes ved at indsætte $x_p = 2$ i ligningerne for hhv. L_1 og L_2 :

$$L_1 : \quad y_p = x_p + 1 \quad \Rightarrow \quad y_p = 2 + 1 = 3$$

$$L_2 : \quad y_p = -\frac{1}{2} \cdot x_p + 4 \quad \Rightarrow \quad y_p = -\frac{1}{2} \cdot 2 + 4 = 3$$

Som forventet ses det at de to ligninger giver samme talværdi $y_p = 3$. Skæringspunktet er herved bestemt til $(x, y) = (2, 3)$.

Metoden for at bestemme to linjers skæringspunkt (x_p, y_p) ud fra deres respektive ligninger kan generaliseres ved at betragte to generelle ligninger for rette linjer på normalformen:

$$L_1 : \quad y = a_1 \cdot x + b_1$$

$$L_2 : \quad y = a_2 \cdot x + b_2$$

Ved skæringspunktets x -værdi x_p , vil begge ligninger give samme y -værdi y_p hvorved der gælder:

$$y_p = a_1 \cdot x_p + b_1 \quad \wedge \quad y_p = a_2 \cdot x_p + b_2$$

Dette vil sige at højresiden af de to ligninger kan sættes lig med hinanden, så der opnås en enkelt ligning med x_p som den eneste ubekendte nu kan bestemmes:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot x_p + b_1 &= a_2 \cdot x_p + b_2 &\Leftrightarrow & a_1 \cdot x_p + a_2 \cdot x_p = b_2 - b_1 \\ &&\Leftrightarrow & (a_1 - a_2) \cdot x_p = b_2 - b_1 \\ &&\Leftrightarrow & x_p = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} \end{aligned}$$

Løsningen x_p kan nu indsættes i ligningerne for de to linjer for at beregne den tilsvarende y -værdi y_p for skæringspunktet:

$$y_p = a_1 \cdot x_p + b_1$$

$$y_p = a_2 \cdot x_p + b_2$$

Resultatet kan nu opsummeres i følgende sætning.

To linjers skæringspunkt

Givet ligningerne for to rette linjer L_1 og L_2 på formen:

$$L_1 : \quad y = a_1 \cdot x + b_1$$

$$L_2 : \quad y = a_2 \cdot x + b_2$$

Såfremt linjerne ikke er parallelle, dvs. $a_1 \neq a_2$, kan koordinaterne for linjernes skæringspunkt (x_p, y_p) bestemmes ved:

$$x_p = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} \quad \text{og} \quad y_p = a_1 \cdot x_p + b_1$$