

Dobbelpunkter

Ved funktionskurver hvor $y = f(x)$ kan man opleve, at der er to forskellige værdier for x , der har samme værdi for y som f.eks. for parabeln givet ved et 2.gradspolynomium.

På samme måde kan man opleve, at der findes vektorfunktioner med bane-
kurver hvor to forskellige værdier for t , ikke bare har samme værdi for y men
også samme værdi for x . Med andre ord krydser banekurven samme punkt
ved to forskellige parameterpunkter og skaber derved et skæringspunkt mel-
lem to parameterpunkter på banekurven. Et sådan skæringspunkt kaldes et
dobbelpunkt da banekurven gennemløber punktet to gange.

Dobbelpunkter

Et dobbelpunkt er kendetegnet ved at positionsvektoren har samme
værdi på to forskellige parameterpunkter t_1 og t_2 :

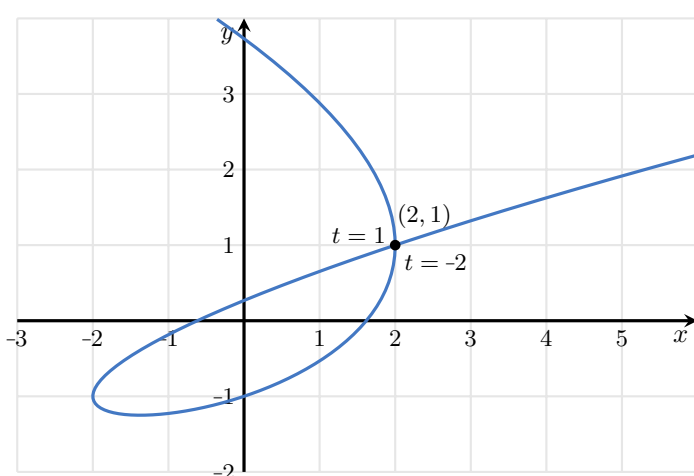
$$\vec{x}(t_1) = \vec{x}(t_2) \quad \text{hvor} \quad t_1 \neq t_2$$

Eksempel med ukendt dobbelpunkt:

Som eksempel betragtes følgende vektorfunktion:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3 \cdot t - t^3 \\ t^2 + t - 1 \end{pmatrix} \quad \text{hvor} \quad t \in [-\infty, \infty]$$

Vektorfunktionens banekurve er plottet i figuren nedenfor.



Af figuren ses, at banekurven har et dobbelpunkt som kan bestemmes ved
betingelsen:

$$\vec{x}(t_1) = \vec{x}(t_2) \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 \cdot t_1 - t_1^3 \\ t_1^2 + t_1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot t_2 - t_2^3 \\ t_2^2 + t_2 - 1 \end{pmatrix}$$

Hver af de to komponenter kan betragtes som en ligning i sig selv og man kan
heraf opstille et ligningssystem af to ligninger med de to ubekendte t_1 og t_2 :

$$\begin{cases} 3 \cdot t_1 - t_1^3 = 3 \cdot t_2 - t_2^3 \\ t_1^2 + t_1 - 1 = t_2^2 + t_2 - 1 \end{cases}$$

Ligningssystemet løses herefter med den yderligere betingelse at de to løsnin-
ger ikke må være samme talværdi $t_1 \neq t_2$. Løsningen på ligningssystemet er:

$$t_1 = -2 \quad \text{og} \quad t_2 = 1$$

For at bestemme koordinaterne for dobbelpunktet indsættes en af parameter-
punkterne (her $t = 1$) i komponentfunktionerne:

$$x(1) = 3 \cdot 1 - 1^3 = 2 \quad \text{og} \quad y(1) = 1^2 + 1 - 1 = 1$$

Banekurven har altså et dobbelpunkt i punktet $(2, 1)$ svarende til de to para-
meterpunkter $t = -2$ og $t = 1$.

Eksempel med kendt dobbelpunkt:

Hvis man, for vektorfunktionen i foregående eksempel, på forhånd kender ko-
ordinaterne for dobbelpunktet $P = (2, 1)$, men ikke kender de to parameter-
punkter kan man bestemme disse ved at bestemme de værdier af parameteren
 t hvor positionsvektoren er lig med stedvektoren for dobbelpunktet:

$$\vec{x}(t_p) = \vec{P} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 \cdot t_p - t_p^3 \\ t_p^2 + t_p - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Betragtes de to komponenter som en ligning i sig selv, kan man heraf opstille
et ligningssystem af to ligninger med en ubekendt t_p :

$$\begin{cases} 3 \cdot t_p - t_p^3 = 2 \\ t_p^2 + t_p - 1 = 1 \end{cases}$$

Idet det er givet at P er et dobbelpunkt vil der være to værdier for t_p der løser
ligningssystemet:

$$t_p = -2 \quad \text{eller} \quad t_p = 1$$

Banekurven har altså et dobbelpunkt i de to parameterpunkter $t = -2$ og $t = 1$.