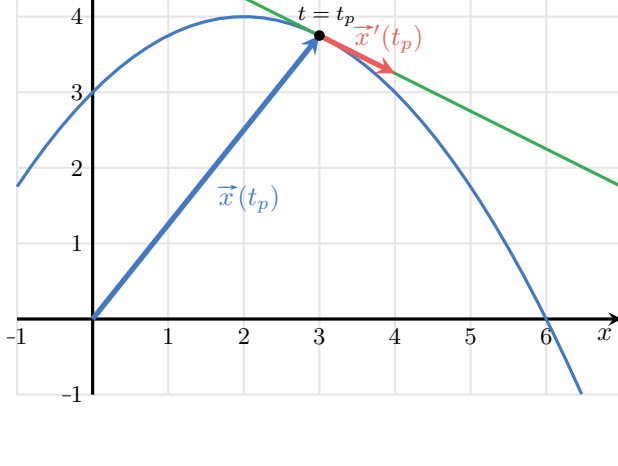


Tangent til banekurve

Begrebet om hastigheds- og accelerationsvektoren kan også generaliseres til tilfælde hvor den frie parameter t ikke nødvendigvis repræsenterer tiden. I sådanne tilfælde vil hastighedsvektoren generaliseres til en retningsvektor for tangentlinjen til banekurven. Accelerationsvektoren vil generaliseres til en vektor, der relaterer til banekurvens krumningsradius.

Parameterfremstilling for tangentlinjen

Retningsvektoren for tangentlinjen til banekurven kan anvendes til at bestemme en parameterfremstilling for tangentlinjen i et givet parameterpunkt $t = t_p$, som illustreret i figuren nedenfor.



Den generelle form for parameterfremstillingen af en ret linje er:

$$\vec{x} = \vec{A} + s \cdot \vec{r}$$

Her er vektor $\vec{A}$ en stedvektor til et kendt punkt på linjen og vektor $\vec{r}$ er en retningsvektor for tangentlinjen. Stedvektoren $\vec{A}$ kan bestemmes direkte ved vektorfunktionen til parameterpunktet $t = t_p$:

$$\vec{A} = \vec{x}(t_p) = \begin{pmatrix} x(t_p) \\ y(t_p) \end{pmatrix}$$

Retningsvektoren, ligesom hastighedsvektoren, er den 1. afledte af vektorfunktionen ved parameterpunktet $t = t_p$:

$$\vec{r} = \vec{x}'(t_p) = \begin{pmatrix} x'(t_p) \\ y'(t_p) \end{pmatrix}$$

Disse ligninger kan nu opsummeres i følgende sætning.

Parameterfremstilling for en banekurves tangentlinje

For en vektorfunktion $\vec{x}(t)$, kan tangentlinjen til den banekurve ved et givet parameterpunkt $t = t_p$ bestemmes som en parameterfremstilling ved:

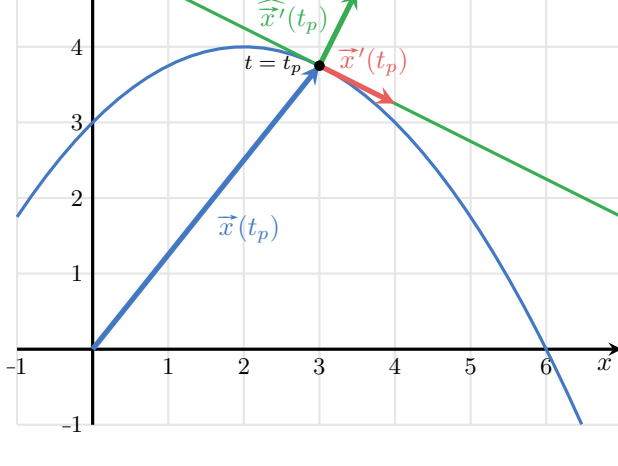
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix}$$

Stedvektorens og retningsvektorens komponenter beregnes ud fra vektorfunktionens komponentfunktioner ved hhv.:

$$A_x = x(t_p) \quad , \quad A_y = y(t_p) \quad \text{og} \quad r_x = x'(t_p) \quad , \quad r_y = y'(t_p)$$

Ligningen for tangentlinjen

Ud over parameterfremstillingen kan man også bestemme ligningen for tangenten til banekurven i et givet parameterpunkt $t = t_p$, som illustreret i figuren nedenfor.



Den generelle form af ligningen for en ret linje er:

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

Koefficienterne a og b er komponenterne for en normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ til linjen og koefficienten c kan beregnes ud fra a og b samt et kendt punkt på linjen $A = (A_x, A_y)$ ved:

$$c = -a \cdot A_x - b \cdot A_y$$

Det kendte punkt på linjen kan beregnes direkte ud fra vektorfunktionens komponentfunktioner:

$$A_x = x(t_p) \quad \text{og} \quad A_y = y(t_p)$$

Normalvektoren kan beregnes som tværvektoren til retningsvektoren, der som vist ovenfor, kunne beregnes som den 1. afledte af vektorfunktionen:

$$\vec{n} = \widehat{\vec{x}'}(t_p) = \begin{pmatrix} -y'(t_p) \\ x'(t_p) \end{pmatrix}$$

Disse ligninger kan nu opsummeres i følgende sætning.

Ligningen for en banekurves tangentlinje

For en vektorfunktion $\vec{x}(t)$, kan tangentlinjen til den banekurve ved et givet parameterpunkt t_p bestemmes som en ligning ved:

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

Ligningens koefficienter beregnes ud fra vektorfunktionens komponentfunktioner ved hhv.:

$$a = -y'(t_p) \quad , \quad b = x'(t_p) \quad \text{og} \quad c = y'(t_p) \cdot x(t_p) - x'(t_p) \cdot y(t_p)$$

Vandrette og lodrette tangenter

I modsætning til funktionskurver, som kun kan have vandrette tangenter, kan banekurver fra vektorfunktioner have både vandrette og lodrette tangenter. Dette skyldes, at en banekurve fra en vektorfunktion ikke er begrænset af kun at have én y -værdi for hver x -værdi og banekurven kan derfor også bevæge sig lodret.

Da den 1. afledte til en vektorfunktion $\vec{x}'(t)$ angiver retningsvektoren for tangentlinjen til banekurven, kan den også anvendes til at bestemme hvornår en banekurve har en hhv. vandret eller lodret tangent.

En vandret tangentlinje vil naturligvis også have en vandret retningsvektor, hvilket betyder, at 2.komponenten, der er vektorens lodrette komponent, skal være 0. Da 2.komponenten for retningsvektoren $\vec{x}'(t)$ i et specifikt parameterpunkt $t = t_p$ er givet ved $y'(t_p)$, kan man bestemme værdien af t_p hvor banekurven har en vandret tangentlinje ved at løse følgende ligning ift. t_p :

$$y'(t_p) = 0$$

Her skal nævnes, at der sagtens kan være flere løsninger for t_p i ovenstående ligning, da der kan være flere steder på banekurven hvor tangentlinjen er vandret.

Med en tilsvarende fremgangsmåde, kan man også bestemme lodrette tangentlinjer ved i stedet at løse ligningen for parameterpunktet t_p , hvor den vandrette komponent af retningsvektoren $\vec{x}'(t_p)$ er lig med 0:

$$x'(t_p) = 0$$

Igen kan der være flere løsninger for t_p i ovenstående ligning, da der kan være flere steder på banekurven hvor tangentlinjen er lodret.

Banekurvens vandrette og lodrette tangentlinjer

Givet en vektorfunktion $\vec{x}(t)$, hvor retningsvektoren for tangentlinjen er bestemt ved:

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

Parameterpunkter t_p for vandrette tangentlinjer kan bestemmes ved at løse følgende ligning:

$$y'(t_p) = 0$$

Ligningen for den vandrette tangent kan herfra bestemmes ved:

$$y = k \quad \text{hvor} \quad k = y(t_p)$$

Parameterpunkter t_p for lodrette tangentlinjer kan bestemmes ved at løse følgende ligning:

$$x'(t_p) = 0$$

Ligningen for den lodrette tangent kan herfra bestemmes ved:

$$x = k \quad \text{hvor} \quad k = x(t_p)$$

Eksempel:

Der er givet en vektorfunktion ved:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3 \cdot t^2 - 2 \\ t^3 - 2 \cdot t + 2 \end{pmatrix} \quad \text{hvor} \quad t \in \mathbb{R}$$

For at bestemme parameterpunkter t_p hvor vektorfunktionens banekurve har en lodret tangent, løses ligningen $x'(t_p) = 0$. Først bestemmes den afledte funktion af vektorfunktionens 1.komponentfunktion:

$$x'(t) = \left(3 \cdot t^2 - 2 \right)' = 3 \cdot 2 \cdot t - 0 = 6 \cdot t$$

Herefter løses ligningen $x'(t_p) = 0$ for t_p :

$$x'(t_p) = 6 \cdot t_p = 0 \quad \Rightarrow \quad t_p = 0$$

Vektorfunktionens banekurve har altså en lodret tangentlinje ved parameterpunktet $t = 0$. For at bestemme punktets koordinater indsættes parameterpunktet $t = 0$ i de to komponentfunktioner:

$$(x(0), y(0)) = (3 \cdot 0^2 - 2, 0^3 - 2 \cdot 0 + 2) = (-2, 2)$$

Vektorfunktionens banekurve har derved en lodret tangent i punktet $(-2, 2)$ som også plottet sammen med retningsvektoren i figuren nedenfor.

