

## Hastighed og acceleration

Den frie parameter  $t$  i en vektorfunktion kan i mange sammenhæng tolkes som en tidsparameter hvilket også er årsagen til at man bruger bogstavet  $t$ . I denne kontekst vil vektorfunktionen altså beskrive positionen af et punkt til forskellige tidspunkter hvilket essentielt er en bevægelse der er kendetegnet ved en hastighed.

En hastighed er den øjeblikkelige ændring i positionen ift. ændringen i tiden og kan derfor bestemmes, som den afledte vektorfunktion af positionen.

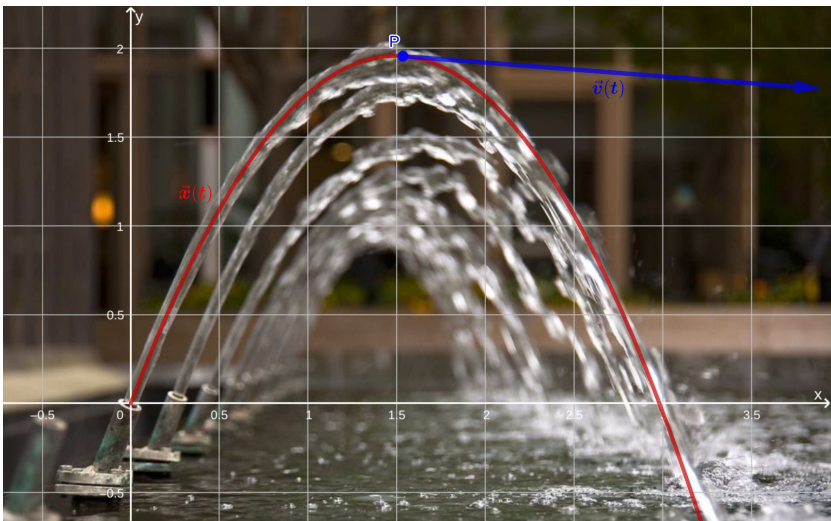
$$\vec{v}(t) = \vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

Hastighedsvektoren har altså to komponenter der angiver hastigheden i de to uafhængige retninger dvs.  $x$ -retningen og  $y$ -retningen. Den totale hastighed som kaldes *farten* bestemmes ved længden af hastighedsvektoren  $|\vec{v}(t)|$ .

Ud over vektorfunktionen for hastighed kan man også bestemme en vektorfunktion for accelerationen. Accelerationen er den øjeblikkelige ændring i hastigheden ift. ændringen i tiden og kan derfor bestemmes, som den afledte vektorfunktion af hastigheden:

$$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$$

Som eksempel på beregning og anvendelse af hastigheds- og accelerationsvektorer betragtes en vandstråle fra en fontæne som ses i figuren nedenfor.



Fra fysiske udledninger af et objekts bevægelse under en tyngdeacceleration, som ikke behandles nærmere her, kan man udlede, at banekurven har følgende generelle form:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cdot t + x_0 \\ -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot t + y_0 \end{pmatrix}$$

Ved at placere koordinatsystemet i vandstrålens startpunkt og anvende tyngdeaccelerationen  $g = 9.82 \text{ [m/s}^2\text{]}$  kan man tilpasse banekurven til vandstrålen som set på figuren ovenfor og opnå følgende vektorfunktion for vandstrålens banekurve:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2.36 \cdot t \\ -4.91 \cdot t^2 + 6.20 \cdot t \end{pmatrix} \quad \text{hvor } t \in [0, 1.37]$$

Hastighedsvektoren kan nu bestemmes ud fra positionsvektoren som den afledte vektorfunktion:

$$\vec{v}(t) = \vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} (2.36 \cdot t)' \\ (-4.91 \cdot t^2 + 6.20 \cdot t)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.36 \\ -9.82 \cdot t + 6.20 \end{pmatrix}$$

For nu, at f.eks. bestemme hastigheden til tiden  $t = 2$  indsættes værdien for parameteren i vektorfunktionen for hastigheden:

$$\vec{v}(2) = \begin{pmatrix} 2.36 \\ -9.82 \cdot 2 + 6.20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.36 \\ -13.44 \end{pmatrix}$$

Ud fra hastighedsvektoren bestemmes farten nu som længden af vektoren:

$$|\vec{v}(2)| = \sqrt{2.36^2 + (-13.44)^2} \approx 13.65$$

Vandstrålens fart ved tidspunktet  $t = 2$  er herved beregnet til  $13.65 \text{ [m/s]}$ .

Vektorfunktionen for accelerationen kan ligeledes bestemmes som den afledte vektorfunktion af hastighedsvektoren:

$$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \begin{pmatrix} (2.36)' \\ (-9.82 \cdot t + 6.20)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9.82 \end{pmatrix}$$

Af accelerationsvektoren ses at denne er konstant ift.  $t$  i retningen lodret nedad med en størrelse på  $9.82$  hvilket stemmer fint overens med tyngdeaccelerationen  $g = 9.82 \text{ [m/s}^2\text{]}$ .