

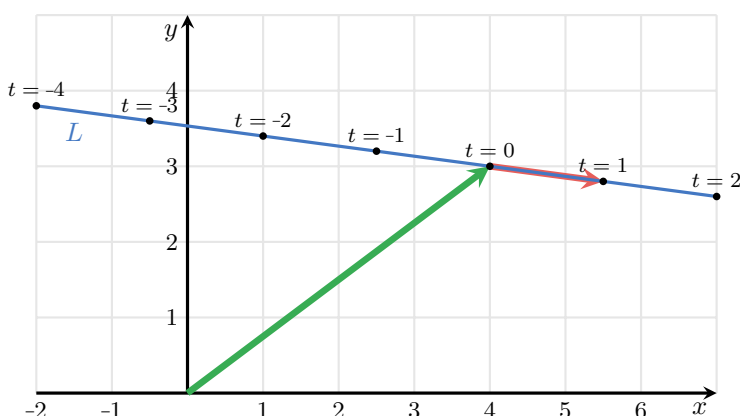
## Introduktion til vektorfunktioner

Et første eksempel på en vektorfunktion er linjens parameterfremstilling. Her bestemmes en ret linje ud fra en kendt stedvektor til et punkt på linjen samt skalering af en retningsvektor med en fri parameter.

Et eksempel på en parameterfremstilling kunne være:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1.5 \\ -0.2 \end{pmatrix}$$

I figuren nedenfor kan det ses, at man ved at variere talværdien af  $t$  (her i intervallet  $t \in [-4, 2]$ ) frembringer en ret linje:



Det ses ligeledes af figuren, at den frie parameter  $t$  er en variabel, der angiver hvor på linjen et punkt befinder sig ift. startpositionen  $t = 0$ .

For at omskrive parameterfremstillingen ovenfor til en vektorfunktion regnes vektorene sammen til én vektor:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 1.5 \cdot t \\ 3 - 0.2 \cdot t \end{pmatrix}$$

Det ses her at begge komponenter kan beskrives som funktioner af den frie parameter  $t$  og man kan derfor betragte parameterfremstillingen som en vektorfunktion  $\vec{x}(t)$  af den uafhængige variabel  $t$ :

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \text{hvor} \quad t \in [t_{\min}, t_{\max}]$$

hvor de to komponentfunktioner i det konkrete eksempel er:

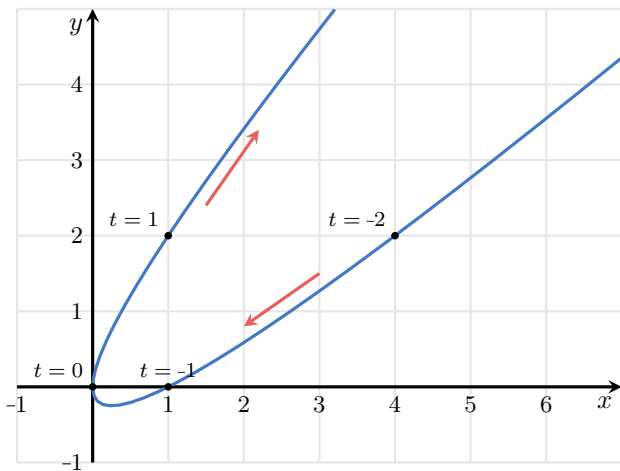
$$x(t) = 4 + 1.5 \cdot t \quad \text{og} \quad y(t) = 3 - 0.2 \cdot t$$

I dette eksempel er begge komponentfunktioner lineærfunktion hvilket også gør at den kurve de frembringer er en ret linje.

Hvis man i stedet betragter vektorfunktionen:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 + t \end{pmatrix} \quad \text{hvor} \quad t \in [-\infty, \infty]$$

Her er komponentfunktionerne begge 2.gradspolynomier hvilket gør, at kurven som vektorfunktionen frembringer når den frie variabel varieres ikke er en ret linje men i stedet den *banekurve* som ses i figuren nedenfor:



*Banekurven* for en vektorfunktion  $\vec{x}(t)$  består af punkterne:

$$(x(t), y(t)) \quad \text{hvor} \quad t \in [t_{\min}, t_{\max}]$$

For at bestemme et specifikt punkt på banekurven, gælder det om først at bestemme talværdien af den frie parameter  $t$  hvorefter punktets koordinater kan bestemmes.

På figuren er der indtegnet tre punkter for hhv.  $t = -1$ ,  $t = 0$  og  $t = 1$ . Ud fra disse punkter kan man angive banekurvens *gennemløbsretning* som er vist med de røde pile.

Ønsker man f.eks. at bestemme hvor en vektorfunktions banekurve evt. skærer med 1.aksen, kan dette gøres ved at bestemme hvilken værdi af  $t$ -variablen  $t_0$  hvor komponentfunktionen  $y(t_0) = 0$ . Når denne værdi  $t_0$  er bestemt kan punktet bestemmes ved  $(x(t_0), y(t_0))$ . På tilsvarende måde kan man også bestemme evt. skæringspunkter på 2.aksen ved at løse  $x(t_0) = 0$ .

### Eksempel:

For vektorfunktionen givet ved:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 + t \end{pmatrix} \quad \text{hvor} \quad t \in [-3, 3]$$

For at bestemme hvor vektorfunktionens banekurve skærer 1.aksen, bestemmes værdien af den frie parameter  $t_0$  hvor 2.komponenten er nul dvs.  $y(t_0) = 0$ :

$$\begin{aligned} y(t_0) = 0 &\Rightarrow t_0^2 + t_0 = 0 &\Leftrightarrow t_0 \cdot (t_0 + 1) = 0 \\ &&\Leftrightarrow t_0 = 0 \quad \vee \quad t_0 = -1 \end{aligned}$$

Det ses, at der er to løsninger og derved to skæringspunkter med 1.aksen. For at beregne  $x$ -værdierne for skæringspunkterne indsættes de fundne løsninger for  $t_0$  i vektorfunktionens 1. komponentfunktion:

$$x(0) = 0^2 = 0 \quad \text{og} \quad x(-1) = (-1)^2 = 1$$

Vektorfunktionens banekurve skærer altså 1.aksen i værdierne  $x = 0$  og  $x = 1$ .