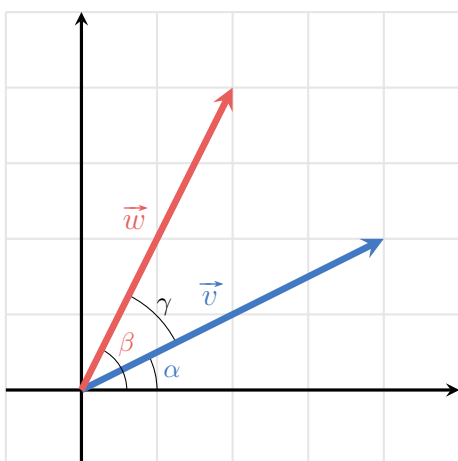
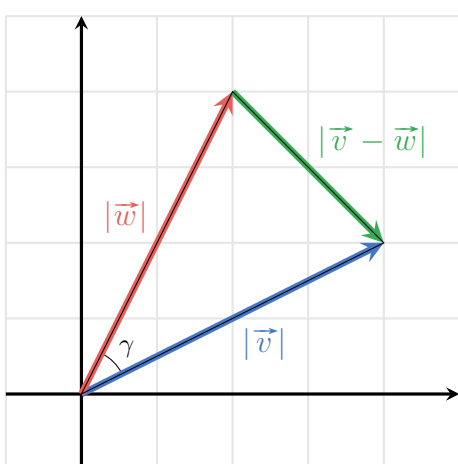


Vinklen mellem to vektorer

Som det kan ses på figuren nedenfor, kan det være tilfældet, at to vektorer ikke har samme retningsvinkel og derfor ikke peger helt i samme retning. For to vektorer der er givet på polær form $(|\vec{v}|, \alpha)$ og $(|\vec{w}|, \beta)$ vil vektorerne udspænde en vinkel γ , som er lig med den absolutte difference i retningsvinklerne: $\gamma = |\beta - \alpha|$.



Såfremt vektorerne er givet på kartesisk form kan man udlede hvordan vinklen mellem vektorerne kan bestemmes ved at betragte følgende figur. Her er endepunkterne for de to vektorer $\vec{v}$ og $\vec{w}$ forbundet ved vektorsubtraktionen $\vec{v} - \vec{w}$. Den resulterende trekant har således en længde, der er lig med længden af vektorerne $|\vec{v}|$, $|\vec{w}|$ og $|\vec{v} - \vec{w}|$.



Da sidelængderne i trekanten er givet ved længden af de respektive vektorer kan cosinusrelationen for trekanten skrives ved:

$$\cos(\gamma) = \frac{|\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - |\vec{v} - \vec{w}|^2}{2 \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$$

For at reducere dette udtryk omskrives først det sidste led i tælleren $|\vec{v} - \vec{w}|^2$ ved at anvende formlen for længden af en vektor:

$$\begin{aligned} |\vec{v} - \vec{w}|^2 &= \left(\sqrt{(v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2} \right)^2 \\ &= (v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2 \\ &= v_1^2 + w_1^2 - 2 \cdot v_1 \cdot w_1 + v_2^2 + w_2^2 - 2 \cdot v_2 \cdot w_2 \\ &= |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - 2 \cdot (v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2) \end{aligned}$$

Dette udtryk sættes nu ind i den foregående cosinusrelation som herefter kan reduceres:

$$\begin{aligned} \cos(\gamma) &= \frac{|\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - (|\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - 2 \cdot (v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2))}{2 \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} \\ &= \frac{|\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - |\vec{v}|^2 - |\vec{w}|^2 + 2 \cdot (v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2)}{2 \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} \\ &= \frac{v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} \end{aligned}$$

Ud fra cosinusrelationen er der altså opnået følgende ligning for cosinusværdien af vinklen:

$$\cos(\gamma) = \frac{v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$$

For at bestemme selve vinklen γ anvendes den omvendte cosinusfunktion på ligningens højreside:

$$\gamma = \arccos\left(\frac{v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}\right)$$

Her skal dog bemærkes, at formlen altid vil give den absolutte vinkel $\gamma \in [0^\circ, 180^\circ]$ på grund af værdimængden for den omvendte cosinusfunktion. Med andre ord, der skelnes her ikke mellem omløbsretninger ift. vinklen mellem vektorerne.

Vinklen mellem to vektorer

For to vektorer givet på kartesisk form $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ kan vinklen γ som de to vektorer udspænder beregnes ved:

$$\gamma = \arccos\left(\frac{v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}\right)$$