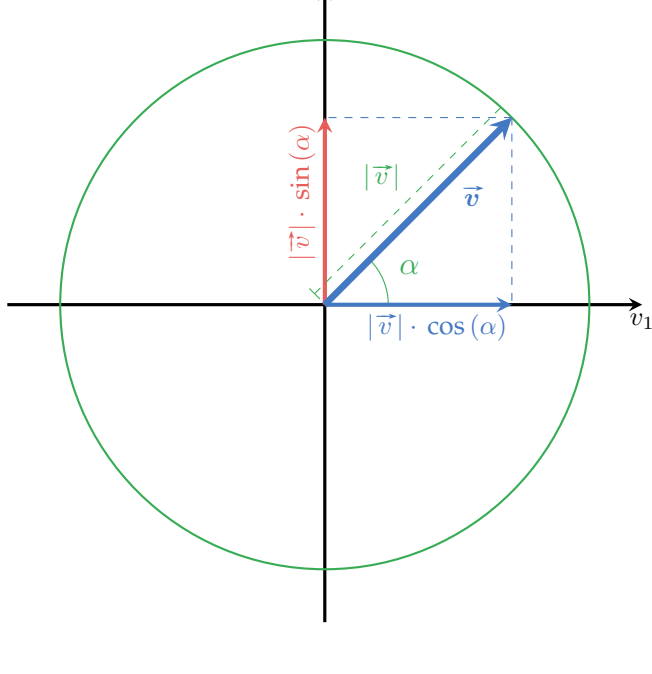


Omregning mellem kartesisk og polær form

Omregning fra polær til kartesisk form

Sammenhængen mellem vektorens polære form og vektorens kartesiske form kan bestemmes ved at betragte nedenstående illustration. Her ses at man kan anvende de trigonometriske funktioner til at bestemme de to kartesiske komponenter v_1 og v_2 ud fra vektorens længde $|\vec{v}|$ og retningsvinkel α .



På figuren ses, at vektorens to komponenter v_1 og v_2 kan bestemmes ud fra de trigonometriske funktioner cosinus og sinus ganget med vektorens længde ved:

$$v_1 = |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha) \quad \text{samt} \quad v_2 = |\vec{v}| \cdot \sin(\alpha)$$

Vektorens kartesiske form kan nu bestemmes ved:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha) \\ |\vec{v}| \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

Heraf kan der opstilles følgende sætning til at bestemme vektorens kartesiske form ud fra dens polære form:

Omregning fra polær til kartesisk form

For en vektor, der er angivet på polær form dvs. ved vektorens længde $|\vec{v}|$ samt retningsvinkel α , kan den tilsvarende kartesiske form beregnes ved:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha) \\ |\vec{v}| \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

Eksempel:

For at vise hvordan man omregner en vektor fra polær form til kartesisk form betragtes følgende specifikke vektor givet på polær form:

$$\vec{v} = (3, 37^\circ)$$

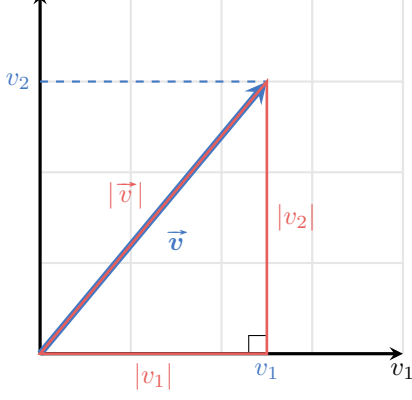
Ud fra vektorens polære form ses at vektorens længde $|\vec{v}| = 3$ og vektorens retningsvinkel $\alpha = 37^\circ$. Herfra kan omregningen foretages ved:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos(37^\circ) \\ 3 \cdot \sin(37^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.40 \\ 1.81 \end{pmatrix}$$

Den kartesiske form for vektoren er $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2.40 \\ 1.81 \end{pmatrix}$ hvor de to komponenter er $v_1 = 2.40$ og $v_2 = 1.81$.

Omregning fra kartesisk til polær form

Betragtes nu den omvendte beregning hvor vektorens længde og retningsvinkel beregnes ud fra vektorens komponenter kan man indledningsvis bestemme vektorens længde. Længden af vektoren bestemmes som hypotenusens længde i den retvinklede trekant hvis kateter består af de absolutte værdier af vektorens to komponenter som illustreret i figuren nedenfor.



Ud fra denne retvinklede trekant kan Pythagoras' sætning anvendes til at bestemme hypotenusen ved:

$$|\vec{v}|^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2 \quad \Rightarrow \quad |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Det bemærkes her, at det kun er den positive kvadratrods der tages i betragtning, idet det vides, at $|\vec{v}|$ er et positivt tal. Herudover er der udnyttet at $|v_1|^2 = v_1^2$ og $|v_2|^2 = v_2^2$ til at simplificere formelen.

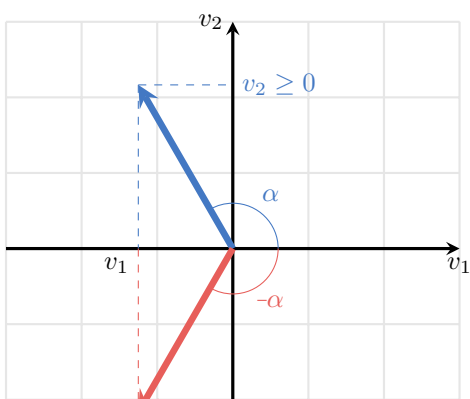
For at bestemme retningsvinklen α ud fra vektorens kartesiske komponenter v_1 og v_2 , tages der udgangspunkt i hvordan 1.komponenten tidligere blev udregnet fra længden og retningsvinklen:

$$v_1 = |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha)$$

Omskrevet til en formel for retningsvinklen α giver dette:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{v_1}{|\vec{v}|}\right)$$

Denne omskrivning skal dog gøres med særlig omhu, idet der findes to forskellige vektorer af længden $|\vec{v}|$ med samme værdi for v_1 . Dette er illustreret i figuren nedenfor.



Som det ses på figuren er de to vektorer – der begge har længden $|\vec{v}|$ og samme værdi for v_1 – forskellige ift. fortegnet for 2.komponenten v_2 . For en positiv værdi af v_2 vil retningsvinklen have en positiv omdrejningsretning hvorved $\alpha > 0$. For en negativ værdi af v_2 vil retningsvinklen være den samme størrelse men i en negativ omdrejningsretning hvorved $\alpha < 0$.

Ved denne måde at kende forskel på de to tilfælde kan der nu opstilles en formen for beregning af en vektors retningsvinkel α ved:

$$\text{Hvis } v_2 \geq 0 : \quad \alpha = \arccos\left(\frac{v_1}{|\vec{v}|}\right)$$

$$\text{Hvis } v_2 < 0 : \quad \alpha = -\arccos\left(\frac{v_1}{|\vec{v}|}\right)$$

Det ses af formelen at denne både kræver kendskab til vektorens komponenter samt vektorens længde. Kombineret med formelen for beregning af en vektors længde ud fra dens komponenter kan man herved omskrive en vektor fra den kartesiske til den polære repræsentationsform.

Omregningen mellem en vektors polære og kartesiske form kan nu opsummeres i følgende sætning:

Omregning fra kartesisk til polær form

For en vektor, der er angivet på kartesisk form dvs. ved to komponenter $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, kan den tilsvarende polære form beregnes ved først at beregne vektorens længde:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Herefter beregnes vektorens retningsvektor ved:

$$\text{Hvis } v_2 \geq 0 : \quad \alpha = \arccos\left(\frac{v_1}{|\vec{v}|}\right)$$

$$\text{Hvis } v_2 < 0 : \quad \alpha = -\arccos\left(\frac{v_1}{|\vec{v}|}\right)$$

Eksempel

For at vise hvordan man omregner en vektor fra kartesisk form til polær form betragtes følgende specifikke vektor givet på kartesisk form:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ud fra vektorens kartesiske form ses, at vektorens 1.komponent er $v_1 = 2$ og 2.komponenten er $v_2 = -3$. Heraf kan længden af vektoren beregnes ved:

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} \approx 3.61$$

For at beregne vektorens retningsvinkel bemærkes at vektorens 2.komponent er negativ $v_2 < 0$ hvorved vektorens retningsvinkel kan beregnes ved:

$$\alpha = -\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}}\right) \approx -56.31^\circ$$

Den polære form for vektoren er altså $\vec{v} \approx (3.61, -56.31^\circ)$.