Determinanten

Princippet med at definere et nyt sæt af basisvektorer kan ligeledes anvendes til at transformere et matematisk plan eller rum. Forestil, at man bevarer et punkts koordinater men i stedet ændrer de basisvektorer som koordinaterne er angivet ved. Stedvektoren for et punkt A vil således kunne beregnes ift. de to basisvektorer $\vec{b}_1$ og $\vec{b}_2$ ved:

$$\vec{A} = A_1 \cdot \vec{b}_1 + A_2 \cdot \vec{b}_2$$

Alt efter de to basisvektorers længde og retning vil en figur, der i det normale koordinatsystem har en form kunne strækkes og roteres til en anden form i det nye koordinatsystem. Ved denne transformation vil figuren altså være beskrevet ift. andre enheder der relaterer til de nye basisvektorer. De nye enheder for længde kan bestemmes ved længden af hver basisvektor. Hvis længden af en basisvektor i det gamle koordinatsystem var 2 vil den nye enhed altså være dobbelt så stor som den gamle. Enheden ift. det rummelige mål, som i to dimensioner er arealet, kan beregnes ved determinanten. For det to-dimensionale tilfælde med basisvektorerne $\vec{b}_1$ og $\vec{b}_2$ er determinanten givet ved:

$$\det\left(\left[\vec{b}_1 \quad \vec{b}_2\right]\right) = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = b_{11} \cdot b_{22} - b_{12} \cdot b_{21}$$

Det ses heraf at determinanten i det to-dimensionale tilfælde netop relaterer til at bestemme arealet af det parallelogram som er udspændt af to vektorer.

Arealet mellem to vektorer og determinanten

I det to-dimensionale tilfælde kan arealet af det parallelogram som er udspændt af de to vektorer $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ og $\vec{w} = \binom{w_1}{w_2}$ kan beregnes ved determinanten ved:

$$A_{\text{paral}} = \left|\det\left(\left[\vec{v} \quad \vec{w}\right]\right)\right|$$