

Basisvektorer

Vektorer, der definerer et koordinatsystem, kaldes for *basisvektorer*. Basisvektorerne fungerer som enhedsvektorer i et nyt koordinatsystem og kan således skaleres med et koordinatsæt til at opnå et bestemt punkt. Et simpelt eksempel på dette er, at man kan konstruere det todimensionelle kartesiske koordinatsystem ud fra de to basisvektorer:

$$\vec{b}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Disse basisvektorer spiller således rollen af hhv. 1. og 2.aksen. For at bestemme en stedvektor $\vec{A}$, der som bekendt angiver punktet $A = (A_x, A_y)$ i koordinatsystemet, kan de to basisvektorer skaleres med hhv. punktets 1. og 2. koordinat ved:

$$\vec{A} = A_x \cdot \vec{b}_x + A_y \cdot \vec{b}_y$$

De to led $A_x \cdot \vec{b}_x$ og $A_y \cdot \vec{b}_y$ kaldes vektorens *komposanter* ift. de to basisvektorer.

Omskrevet til komponentform, er det lettere at se hvordan denne ligning netop sammensætter stedvektoren $\vec{A}$ ud fra en skalering af basisvektorerne $\vec{b}_x$ og $\vec{b}_y$:

$$\vec{A} = A_x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + A_y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ A_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$$

Af ligningens ses ligeledes at vektorens *komposanter* er bestemt til:

$$A_x \cdot \vec{b}_x = \begin{pmatrix} A_x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad A_y \cdot \vec{b}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ A_y \end{pmatrix}$$

Det skal her bemærkes at basisvektorerne for det kartesiske koordinatsystem $\vec{b}_x$ og $\vec{b}_y$ er vinkelrette enhedsvektorer, hvilket gør, at det netop er koordinaterne A_x og A_y , der skalerer basisvektorerne til vektorens komposanter.

Man kunne imidlertid tænke sig at man havde brug for, at beskrive stedvektoren $\vec{A}$ i et sekundært koordinatsystem der er roteret 30° mod uret. I så fald vil de nye basisvektorer være givet ved:

$$\vec{b}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(30^\circ) \\ \sin(30^\circ) \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b}_\beta = \begin{pmatrix} \cos(120^\circ) \\ \sin(120^\circ) \end{pmatrix}$$

Som det kan ses er retningsvinklen for $\vec{b}_\beta$ givet til 120° således at de to basisvektorer stadig er vinkelrette da vinklen mellem basisvektorerne er 90° .

Såfremt man nu betragter et konkret punkt $A = (3, 2)$ kan man bestemme stedvektor $\vec{A}$'s komposanter i dette sekundære koordinatsystem ved at opstille følgende ligning:

$$\vec{A} = A_\alpha \cdot \vec{b}_\alpha + A_\beta \cdot \vec{b}_\beta$$

Her er både vektor $\vec{A}$, $\vec{b}_\alpha$ og $\vec{b}_\beta$ kendte vektorer og ligningen kan således opstilles på komponentform ved:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = A_\alpha \cdot \begin{pmatrix} \cos(30^\circ) \\ \sin(30^\circ) \end{pmatrix} + A_\beta \cdot \begin{pmatrix} \cos(120^\circ) \\ \sin(120^\circ) \end{pmatrix}$$

Hver komponent udgør således en ligning hvorved følgende ligningssystem kan opstilles:

$$\begin{cases} 3 = A_\alpha \cdot \cos(30^\circ) + A_\beta \cdot \cos(120^\circ) \\ 2 = A_\alpha \cdot \sin(30^\circ) + A_\beta \cdot \sin(120^\circ) \end{cases}$$

Ligningssystemet kan herefter løses f.eks. ved brug af erstatningsmetoden hvilket giver den afrundede løsning:

$$A_\alpha \approx 3.60 \quad \text{og} \quad A_\beta \approx 0.23$$

For til sidst at opstille vektor $\vec{A}$'s komposanter ift. basisvektorerne $\vec{b}_\alpha$ og $\vec{b}_\beta$ skaleres disse mht. de fundne værdier for hhv. A_α og A_β

$$A_\alpha \cdot \vec{b}_\alpha \approx 3.60 \cdot \begin{pmatrix} \cos(30^\circ) \\ \sin(30^\circ) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3.12 \\ 1.80 \end{pmatrix}$$

$$A_\beta \cdot \vec{b}_\beta \approx 0.23 \cdot \begin{pmatrix} \cos(120^\circ) \\ \sin(120^\circ) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1.80 \\ 3.12 \end{pmatrix}$$

Det skal dog her fremhæves at basisvektorerne behøver hverken at være enhedsvektorer eller vinkelrette for at kunne bruges til at bestemme en vektors komposanter. Det eneste krav er at de ikke er parallelle da det i så fald vil sige, at ligningssystemet ikke ville have nogen løsning.