

Prikproduktet (skalarproduktet)

I dette afsnit introduceres endnu en form for multiplikation for vektorer, *prikproduktet*  $(\cdot)$ , som også kaldes *skalarproduktet*. I modsætning til skalering af vektorer – som anvender et enkelt reelt tal som skaleringsfaktor – er prikproduktet i modsætning en regneart mellem to vektorer.

For at forstå denne regneart og hvordan den relaterer til almindelig multiplikation, introduceres først den polære form af prikproduktet mellem to vektorer  $\vec{v}$  og  $\vec{w}$ , der er givet ved:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\gamma)$$

Prikproduktet kan forstås som en generalisering af almindelig multiplikation på den endimensionelle talakse. Det vil sige, at når de to de to vektorer er ensrettede, skal prikproduktet give almindelig multiplikation. Dette er også tilfældet idet  $\gamma = 0^\circ$  og derfor er  $\cos(\gamma) = 1$  hvilket giver:

$$\gamma = 0^\circ \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$$

Bemærk at resultatet af prikproduktet altid er positivt når vektorerne er ensrettede – også selvom de peger i en negativ retning. Dette er netop også tilfældet i almindelig multiplikation hvor to negative talværdier ganget sammen giver et positivt resultat.

Et andet tilfælde er når vektorerne er modsatrettede, hvilket betyder at  $\gamma = 180^\circ$  og derfor er  $\cos(\gamma) = -1$ , giver prikproduktet:

$$\gamma = 180^\circ \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} \cdot \vec{w} = -|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$$

Her bemærkes at resultatet af prikproduktet altid er negativt når vektorerne er modsatrettede, hvilket stemmer overens med almindelig multiplikation hvor en negativ og en positiv talværdi ganget sammen giver et negativt resultat.

Når de to vektorer derimod er ortogonale dvs. vinkelrette på hinanden, hvilket betyder at  $\gamma = 90^\circ$  og derfor er  $\cos(\gamma) = 0$ , giver prikproduktet:

$$\gamma = 90^\circ \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$

Dette resultat kan umiddelbart forekomme lidt mystisk til at starte med men ved nærmere eftertanke giver det mening, at idet de to vektorers retning er fuldstændig uafhængige, er produktet lig med nul.

Prikproduktets kartesiske form kan beregnes ved at anvende formlen for vinklen mellem to vektorer hvor cosinusværdien til vinklen  $\gamma$  er givet ved:

$$\cos(\gamma) = \frac{v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$$

Indsættes dette i den polære form af prikproduktet opnås:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \frac{v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2$$

Den kartesiske form af prikproduktet er herved udledt til:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2$$

For to vektorer givet på kartesisk form  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$  og  $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$  kan prikproduktet af de to vektorer beregnes ved:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2$$

Her bemærkes, at selvom  $\vec{v}$  og  $\vec{w}$  er vektorer bliver resultatet af prikproduktet et reelt tal og altså *ikke* en vektor.

Sætningen for prikproduktet kan ydermere generaliseres til vektorer af en vilkårlig længde  $n$  hvorved prikproduktet kan beregnes ud fra de to vektorers komponenter ved:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + \dots + v_n \cdot w_n$$

Eksempel:

For at vise hvordan prikproduktet beregnes, betragtes eksemplet hvor to vektorer er givet ved:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Prikproduktet kan heraf beregnes ved:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-5) + 4 \cdot 3 = -10 + 12 = 2$$

Heraf ses at prikproduktet  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 2$ .

Prikproduktets relation til vinklen mellem to vektorer

Ud fra kendskab til cosinusfunktionens værdier til forskellige vinkler, kan man ud fra prikproduktets polære form:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\gamma)$$

udlede følgende implikationer:

|                                                      |                   |                             |                               |
|------------------------------------------------------|-------------------|-----------------------------|-------------------------------|
| $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$                          | $\Leftrightarrow$ | $\vec{v} \perp \vec{w}$     | Vektorerne er vinkelrette.    |
| $\hat{\vec{v}} \cdot \vec{w} = 0$                    | $\Leftrightarrow$ | $\vec{v} \parallel \vec{w}$ | Vektorerne er parallelle.     |
| $\vec{v} \cdot \vec{w} =  \vec{v}  \cdot  \vec{w} $  | $\Leftrightarrow$ | $\gamma = 0^\circ$          | Vektorerne er ensrettede.     |
| $\vec{v} \cdot \vec{w} = - \vec{v}  \cdot  \vec{w} $ | $\Leftrightarrow$ | $\gamma = 180^\circ$        | Vektorerne er modsat rettede. |
| $\vec{v} \cdot \vec{w} > 0$                          | $\Rightarrow$     | $\gamma < 90^\circ$         | Vinklen $\gamma$ er spids.    |
| $\vec{v} \cdot \vec{w} < 0$                          | $\Rightarrow$     | $\gamma > 90^\circ$         | Vinklen $\gamma$ er stump.    |

I ovenstående tabel er der brugt relationerne  $\perp$  og  $\parallel$ , som angiver, at vektorerne er hhv. *ortogonale*  $\perp$  (dvs. vinkelrette) eller *parallelle*  $\parallel$ .

For generelt at bestemme vinklen mellem to vektorer  $\vec{v}$  og  $\vec{w}$  ud fra prikproduktet kan formlen for vinklen mellem to vektorer også skrives med brug af prikproduktet ved:

$$\gamma = \arccos\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}\right)$$