

Kombinationer

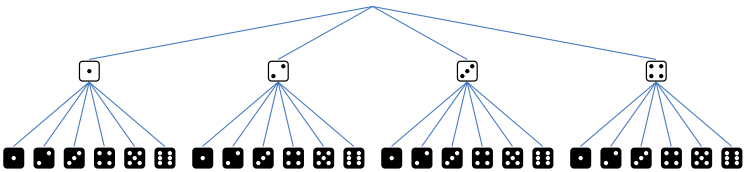
Når hvert udfald har en lige stor sandsynlighed, dvs. for et symmetrisk sandsynlighedsfelt, kan sandsynligheden for en hændelse beregnes ved at dividere antallet af gunstige udfald med det samlede antal af udfald. Med andre ord divideres størrelsen af hændelsesmængden $\mathbb{H}$ med størrelsen af udfaldsmængden $\mathbb{U}$.

I tilfælde af et terningkast med en 6-sidet terning er det rimeligt ligetil at se, at udfaldsmængden har en størrelse på $|\mathbb{U}| = 6$. Men kaster man en 4-sidet terning sammen med en 6-sidet terning er størrelsen på udfaldsmængden måske lidt mindre åbenlyst. En måde at finde ud af det på er ved at skrive samtlige udfald op og tælle men man kan dog hurtigt se, at fordi der er tale om to sammenfaldende hændelser – altså de to terningers udfald – kan samtlige kombinationer opstilles ved at bruge rækker til udfaldet af den ene hændelse og søjler til udfaldet af den anden hændelse:

$$\mathbb{U} = \left\{ \begin{pmatrix} \square & \blacksquare \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \square & \blacksquare \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \square & \boxtimes \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \square & \boxtimes \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \square & \boxtimes \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \square & \boxtimes \end{pmatrix}, \right. \\ \begin{pmatrix} \square & \blacksquare \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \square & \blacksquare \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \square & \boxtimes \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \square & \boxtimes \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \square & \boxtimes \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \square & \boxtimes \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \boxdot & \blacksquare \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxdot & \blacksquare \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxdot & \boxtimes \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxdot & \boxtimes \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxdot & \boxtimes \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxdot & \boxtimes \end{pmatrix}, \\ \left. \begin{pmatrix} \boxdot & \blacksquare \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxdot & \blacksquare \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxdot & \boxtimes \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxdot & \boxtimes \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxdot & \boxtimes \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxdot & \boxtimes \end{pmatrix} \right\}$$

Det samlede antal af udfald kan altså beregnes ved at gange antallet af rækker med antallet af søjler hvilket vil sige antallet af udfald for den ene hændelse 4 med antallet af udfald for den anden hændelse 6 hvilket i dette tilfælde giver $4 \cdot 6 = 24$.

En anden måde at visualisere dette princip på er ved at anvende et såkaldt *tælletræ* hvor hver udfald for den ene hændelse sættes sammen med etvært udfald for den anden hændelse i en træstruktur. For eksemplet med et terningkast af en 4-sidet terning sammen med en 6-sidet terning vil tælletræet se ud som vist nedenfor.

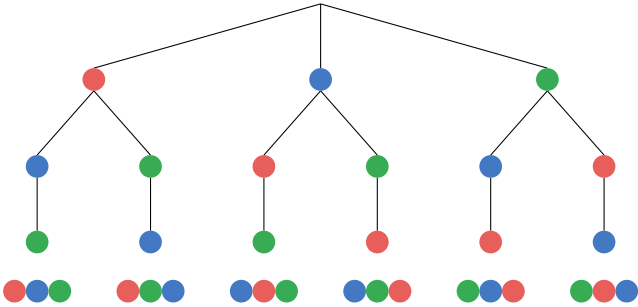


I et tælletræet ses at alle kombinationerne er frembragt ved at alle mulighederne for udfaldet af den 4-sidet terning i første række er sammensat med alle mulighederne for den 6-sidet terning i anden række.

Rækkefølger (permutationer)

Et andet kombinatorisk problem der ofte er vigtigt ift. sandsynligheder er hvor mange forskellige rækkefølger som et antal elementer kan forekomme i. Dette kaldes også for *permutationer*. For at illustrere princippet betragtes tre bolde – en rød, en blå, og en grøn – som skal placeres i rækkefølge. Så hvor mange forskellige rækkefølger er der?

Først kan man illustrere processen med et tælletræ som ses nedenfor.



I tælletræet kan det ses at man starter med at kunne vælge mellem alle tre farver, men i de efterfølgende valg er mulighederne begrænset af at der er farver der allerede er valgt. Man starter således med 3 valgmuligheder, derefter 2 og til sidst kun 1 valgmulighed. Det samlede antal af forskellige rækkefølger kan altså bestemmes ved multiplikationsprincippet til $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ som også kan ses i tælletræet.

Dette princip kan generaliseres til n antal elementer ved at gange n med $n - 1$ med $n - 2$ osv. helt ned til 1. Den forkortede notation for denne regneproses kaldes *fakultet* og noteres ved symbolet $!$ således at:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1$$

I tillæg til dette er det af praktiske årsager når man skal opskrive formler defineret at $0! = 1$.