Kombinerede udfald

Det er ofte at der i stokastiske forsøg indgår flere. Hvis udfaldet af den ene variabel ikke påvirker udfaldet af den anden variabel er der tale om uafhængige hændelser.

Et eksempel på dette er et terningkast med to 6-sidet terninger hvor man betragter to variable med hver deres udfaldsrum:

$$u \in \left\{ ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅ \right\} \quad \text{og} \quad v \in \left\{ ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅ \right\}$$

Det samlede udfaldsrum udgøres således af samtlige kombinationer af de to udfald for hver terning:

$$\begin{aligned}\mathbb{U} = \Big\{ &(⚀,⚀), (⚀,⚁), (⚀,⚂), (⚀,⚃), (⚀,⚄), (⚀,⚅),\\ &(⚁,⚀), (⚁,⚁), (⚁,⚂), (⚁,⚃), (⚁,⚄), (⚁,⚅),\\ &(⚂,⚀), (⚂,⚁), (⚂,⚂), (⚂,⚃), (⚂,⚄), (⚂,⚅),\\ &(⚃,⚀), (⚃,⚁), (⚃,⚂), (⚃,⚃), (⚃,⚄), (⚃,⚅),\\ &(⚄,⚀), (⚄,⚁), (⚄,⚂), (⚄,⚃), (⚄,⚄), (⚄,⚅),\\ &(⚅,⚀), (⚅,⚁), (⚅,⚂), (⚅,⚃), (⚅,⚄), (⚅,⚅) \Big\}\end{aligned}$$

Det bemærkes ud fra det samlede udfaldsrum at der i alt er $|\mathbb{U}| = 36$ forskellige udfald hvilket gør at sandsynligheden for et bestemt udfald som f.eks. at slå to seksere er $\frac{1}{36}$, da der er tale om et symmetrisk sandsynlighedsfelt. Sandsynligheden for at udfaldet for hver enkelt terning er en sekser er som bekendt $\frac{1}{6}$, så for at opnå sandsynligheden for begge udfald er sammenfaldende, dvs. at slå to seksere, skal disse altså ganges sammen:

$$\begin{aligned}P\Big((u,v) = (⚅,⚅)\Big) &= P\Big(u = ⚅ \ \wedge \ v = ⚅\Big)\\ &= P\big(u = ⚅\big) \cdot P\big(v = ⚅\big)\\ &= \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{36}\end{aligned}$$

Af ovenstående beregning kan det ses at udsagnet for, at udfaldet , er blevet omskrevet til et sammensat udsagn:

$$(u,v) = (⚅,⚅) \quad \Leftrightarrow \quad u = ⚅ \ \wedge \ v = ⚅$$

Herefter kan sandsynligheden beregnes ved multiplikationsprincippet.

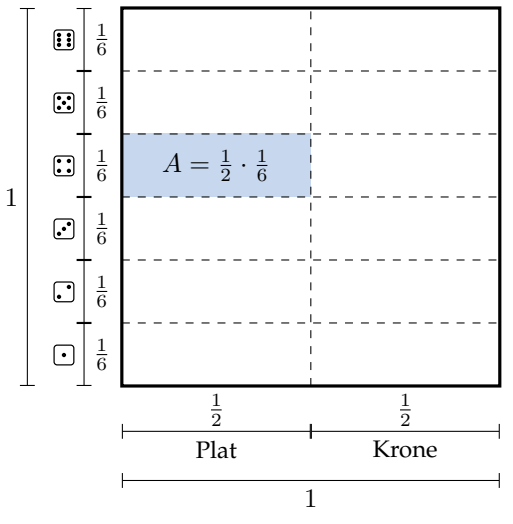
Multiplikationsprincippet ("både og" $\wedge$)

Hvis to uafhængige udfald u og v kombineres kan sandsynligheden for at både udfaldet u er lig med u_1 og at udfaldet v er lig med v_1, beregnes ved at gange sandsynlighederne for de to enkelte udfald sammen:

$$P\Big(u = u_1 \ \wedge \ v = v_1\Big) = P\big(u = u_1\big) \cdot P\big(v = v_1\big)$$

En måde at grafisk anvende multiplikationsprincippet er ved at opstille et kvadrat med sidelængderne på 1 således at arealet også er 1. På denne måde kan den ene sidelængde repræsentere sandsynlighedsfeltet for det ene udfald, den anden sidelængde sandsynlighedsfeltet for det andet udfald og arealet sandsynlighedsfeltet for de kombinerede udfald.

Betragtes f.eks. tilfældet hvor man kaster en 6-sidet terning sammen med en mønt. Her vil der være $\frac{1}{6}$ sandsynlighed for hver af siderne på terningen og $\frac{1}{2}$ sandsynlighed for hver side af mønten. Man kan nu anvende et kvadrat med sidelængderne og arealet på 1 til at undersøge sandsynlighederne for de kombinerede udfald som ses på figuren nedenfor. På den ene sidelængde inddeles kvadratets side i to lige store dele for hhv. plat og krone, hvorimod på den anden side inddeles i seks lige store dele for hhv. hver af siderne på terningen.



Inddelingen af kvadratet kan nu anvendes til at beregne sandsynligheder for kombinerede udfald. F.eks. er der i figuren vist kombinationen af at udfaldet af mønten er plat og udfaldet af terningen er ⚃ hvor sandsynligheden beregnes ved at beregne arealet af denne delmængde hvilket altså giver $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \approx 8.3\%$.