

Hændelser

Nogle gange er man ikke bare interesseret i sandsynligheden for et bestemt udfald men mere om sandsynligheden for et udvalg af udfald. I sandsynlighedsregning kaldes dette begreb for en *hændelse*. Her skal det dog lige nævnes, at et enkelt udfald også kan udgøre en hændelse.

I tilfældet med et terningkast kunne et eksempel på en hændelse være om udfaldet har mere end 3 øjne. Hændelsen formuleres matematisk ved at betragte udfaldsmængden $\mathbb{U}$ og derfra samle de gunstige udfald, som udgør den specifikke hændelse i mængden $\mathbb{H}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{U} &= \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 5 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 6 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 5 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 6 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 6 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 6 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array} \right\} \\ \mathbb{H} &= \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 6 \\ \hline \end{array} \right\}\end{aligned}$$

Hændelsesmængden $\mathbb{H}$ er det man kalder en *ægte delmængde* af udfaldsmængden $\mathbb{U}$ og man kan nu formulere et matematisk udsagn for at udfaldet opfylder hændelsen ved $u \in \mathbb{H}$. Sandsynligheden for dette udsagn er sandt kan nu beregnes ved:

$$\begin{aligned}P(u \in \mathbb{H}) &= P(u \in \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 6 \\ \hline \end{array} \right\}) \\ &= P(u = \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline \end{array} \vee u = \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array} \vee u = \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 6 \\ \hline \end{array}) \\ &= P(u = \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline \end{array}) + P(u = \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array}) + P(u = \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 6 \\ \hline \end{array}) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%\end{aligned}$$

Sandsynligheden for at udfaldet for et terningkast mere end 3 øjne er altså 50%.

Af ovenstående beregning kan det ses at udsagnet for, at udfaldet tilhører hændelsesmængden, er blevet omskrevet til et sammensat udsagn:

$$u \in \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 6 \\ \hline \end{array} \right\} \Leftrightarrow u = \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline \end{array} \vee u = \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array} \vee u = \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 6 \\ \hline \end{array}$$

Denne omskrivning siger, at hvis udfaldet u tilhører mængden $\left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 6 \\ \hline \end{array} \right\}$ skal det gælde at udfaldet enten er lig med $\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline \end{array}$ eller $\begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array}$ eller $\begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 6 \\ \hline \end{array}$. Herefter kan sandsynligheden beregnes ved additionsprincippet.

Additionsprincippet ("enten eller" $\vee$)

Sandsynligheden for om udfaldet u er lig med enten u_1 eller u_2 , kan beregnes ved at lægge sandsynlighederne for de to enkelte udfald sammen:

$$P(u = u_1 \vee u = u_2) = P(u = u_1) + P(u = u_2)$$

Hændelser for et symmetrisk sandsynlighedsfelt

I det tidligere eksempel med et terningkast hvor hændelsen om udfaldet har et lige antal øjne undersøges, kan det ses at sandsynligheden kan skrives ved $\frac{3}{6}$. Denne brøk udgør ligeledes forholdet mellem antallet af elementer i hhv. hændelses- og udfaldsmængden, hvilket netop er tilfældet når udfaldsmængden har et symmetrisk sandsynlighedsfelt. Beregningen af sandsynligheden for en hændelse ved et symmetrisk sandsynlighedsfelt kan således generaliseres til følgende sætning:

Hændelse for et symmetrisk sandsynlighedsfelt

For et udfaldsrum $\mathbb{U}$ med et symmetrisk sandsynlighedsfelt kan sandsynligheden for en hændelse givet ved hændelsesmængden $\mathbb{H}$ beregnes ved:

$$P(u \in \mathbb{H}) = \frac{|\mathbb{H}|}{|\mathbb{U}|}$$

Her betegner $|\mathbb{H}|$ og $|\mathbb{U}|$ antallet af elementer i hhv. hændelses- og udfaldsmængden.

Komplimentære hændelser

Et spørgsmål, som måske lige så ofte er relevant som om et udfald opfylder en hændelse, er om udfaldet ikke opfylder hændelsen. Dette kaldes også den *komplimentære hændelse* og kan formuleres ved $P(u \notin \mathbb{H})$. Beregningen af sandsynligheden for den complimentære hændelse kan udledes ved at udnytte at sandsynligheden for at hændelsen sker og at den ikke sker skal summere til 1 dvs. 100%:

$$P(u \in \mathbb{H}) + P(u \notin \mathbb{H}) = 1$$

Isoleres sandsynligheden for den complimentære hændelse fås:

$$P(u \notin \mathbb{H}) = 1 - P(u \in \mathbb{H})$$

I tilfældet af et symmetrisk sandsynlighedsfelt kan den complimentære hændelse ligeledes beregnes ved:

$$P(u \notin \mathbb{H}) = 1 - \frac{|\mathbb{H}|}{|\mathbb{U}|}$$