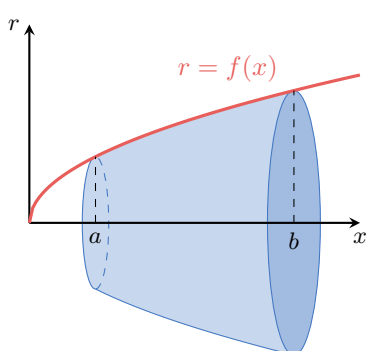


Omdrejningslegemer

En særlig type af rummelige legemer, der kaldes *omdrejningslegemer*, er rummelige figurer, der er symmetriske ift. en vilkårlig rotation omkring en bestemt længde akse. Med symmetri menes her, at et legemes form ikke ændrer sig når det roteres. For at et legeme har denne egenskab må dets tværsnit altså være en cirkel hvor længdeaksen går gennem dets centrum. Dette er fordi at en cirkel er den eneste plane figur, der er ikke ændrer form når det roteres med en vilkårlig vinkel. Eksempler på omdrejningslegemer er: en cirkulær cylinder, en cirkulær kegle, en kugle, osv. men også mere komplekse legemer kan være omdrejningslegemer. F.eks. kan formen på et vinglas, en kagerulle, eller en lampe også være et omdrejningslegeme såfremt det er rotationssymmetrisk omkring en længdeakse. Ud fra disse betragtninger om rotationssymmetri gælder der, at det cirkulære tværsnit entydigt kan bestemmes med en enkelt talværdi nemlig cirkelns radius. Dette forhold muliggør, at man kan angive omdrejningslegemet ved en funktion af en variabel og herved anvende bestemte integraler til at beregne rumfanget og overfladearealet af legemet.

Et omdrejningslegeme kan angives ved tværsnittets radius som en funktion af længdeaksen dvs. $r = f(x)$. Dette er illustreret i figuren nedenfor hvor funktionen er indtegnet i et xr -koordinatsystem med omdrejningslegemet illustreret ved den blå flade. Som det kan ses er x -aksen højdeaksen hvor omdrejningslegemet er rotationsymmetrisk og funktionen f angiver således omdrejningslegemets radius på denne akse ved $r = f(x)$.



Idet tværsnittet af rotationslegemet er en cirkel kan tværsnitsarealet beregnes ud fra tværsnittets radius ved:

$$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot f(x)^2$$

Rumfanget for et givet interval $x \in [a, b]$ langs højdeaksen x opnås ved det bestemte integral af funktionen for arealet:

$$V = \int_a^b \pi \cdot f(x)^2 \cdot dx = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 \cdot dx$$

Resultatet opsummeres i følgende sætning:

Rumfang af et omdrejningslegeme

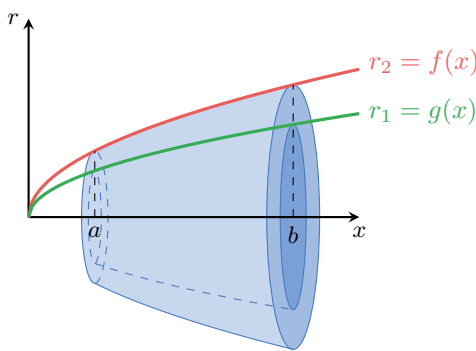
Givet et omdrejningslegeme om en længdeakse x hvor tværsnittets radius r er givet som en funktion af positionen på længdeaksen $r = f(x)$. Rumfanget af omdrejningslegemet i intervallet $x \in [a, b]$ kan i så fald beregnes ved:

$$V = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 \cdot dx$$

For hule omdrejningslegemer kan rumfanget af den solide del bestemmes ud fra to funktioner f og g der hhv. beskriver omdrejningslegemets indre radius r_1 og ydre radius r_2 i forhold til positionen på rotationsaksen x :

$$r_1 = g(x) \quad \text{og} \quad r_2 = f(x)$$

Dette er illustreret på figuren nedenfor hvor det ses, at der ved omdrejning af de to funktioner dannes hhv. et indre og et ydre rumfang.



Rumfanget, der ved omdrejning dannes mellem de to funktionskurver V kan beregnes som rumfanget dannet af den ydre funktionskurve V_2 fratrukket rumfanget dannet af den indre funktionskurve V_1 :

$$V = V_2 - V_1$$

Ved at anvende formelen for rumfanget af et solidt omdrejningslegeme kan rumfanget af det hule omdrejningslegeme beregnes ved:

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 \cdot dx - \pi \cdot \int_a^b g(x)^2 \cdot dx \\ &= \pi \cdot \left(\int_a^b f(x)^2 \cdot dx - \int_a^b g(x)^2 \cdot dx \right) \\ &= \pi \cdot \int_a^b \left(f(x)^2 - g(x)^2 \right) \cdot dx \end{aligned}$$

Resultatet kan opsummeres i følgende sætning:

Rumfanget af hule omdrejningslegemer

Givet et hult omdrejningslegeme om en længdeakse x hvor tværsnittets indre radius r_1 og ydre radius r_2 er givet som funktioner af positionen på længdeaksen hhv. $r_1 = g(x)$ og $r_2 = f(x)$. Rumfanget af det hule omdrejningslegeme i intervallet $x \in [a, b]$ kan i så fald beregnes ved:

$$V = \pi \cdot \int_a^b \left(f(x)^2 - g(x)^2 \right) \cdot dx$$