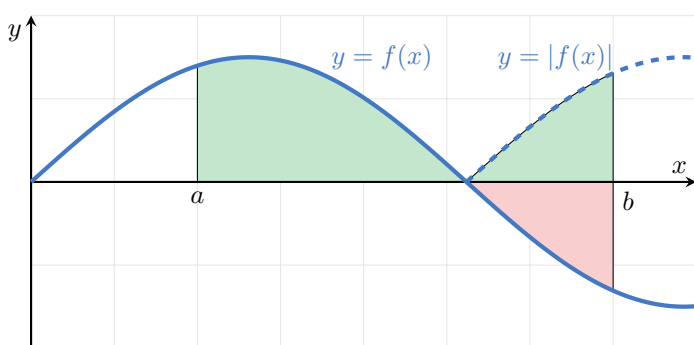


Arealet under en funktionskurve

Det bestemte integral kan også anvendes til at bestemme arealet mellem funktionskurven og førsteaksen. Dette ses ved at betragte følgende figur hvor det bestemte integral er illustreret af en givet funktion der både har positive og negative funktionsværdier i det aktuelle interval.



Det ses af figuren, at der i tilfælde af både positive og negative funktionsværdier vil bidrage hhv. positivt og negativt til værdien af det bestemte integrale. Dette resulterer i at det bestemte integrale ikke direkte beregner arealet mellem funktionskurven og 1.aksen idet arealer kun kan være positive størrelser.

For at løse dette problem og derved opnå en metode til at beregne arealet mellem funktionskurven og 1.aksen er det derfor nødvendigt at man beregner det bestemte integral af den absolutte funktionsværdi:

$$A = \int_a^b |f(x)| \cdot dx$$

Det opnåede resultat opsummeres i følgende sætning:

Arealet mellem en funktionskurve og førsteaksen

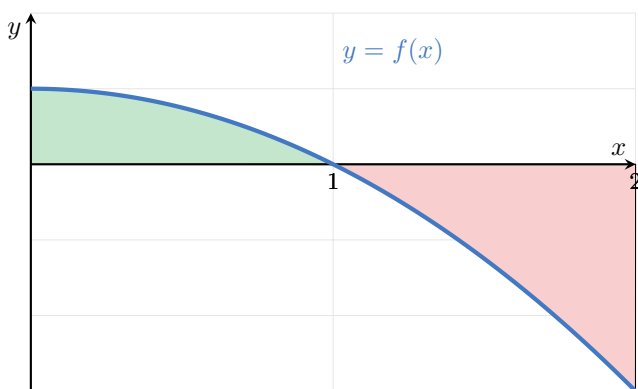
For en funktionskurve, der er givet i intervallet $x \in [a, b]$ ved $y = f(x)$, er arealet, der er afgrænset af funktionskurven, førsteaksen, samt de lodrette linjer $x = a$ og $x = b$, givet ved:

$$A = \int_a^b |f(x)| \cdot dx$$

For at vise hvordan man skal anvende ovenstående formel i en håndberegning beregnes nu arealet mellem en funktionskurve og 1.aksen i intervallet $x \in [0, 2]$ hvor funktionskurven er givet ved:

$$y = f(x) \quad \text{hvor} \quad f(x) = 1 - x^2$$

Ved at plotte funktionskurven, som i figuren nedenfor, kan man se at funktionen både har negative og positive funktionsværdier i intervallet $x \in [0, 2]$ hvor nulpunktet er ved $x = 1$.



Formlen for arealet mellem funktionskurven og 1.aksen beregnes nu ved at anvende indskudsreglen til at opdele integralet i to intergraler for hhv. $x \in [0, 1]$ og $x \in [1, 2]$:

$$A = \int_0^2 |f(x)| \cdot dx = \int_0^1 f(x) \cdot dx + \int_1^2 -f(x) \cdot dx$$

Forskriften indsættes og integralet bestemmes:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (1 - x^2) \cdot dx + \int_1^2 -(1 - x^2) \cdot dx \\ &= \int_0^1 (1 - x^2) \cdot dx + \int_1^2 (x^2 - 1) \cdot dx \\ &= \left[x - \frac{1}{3} \cdot x^3 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3} \cdot x^3 - x \right]_1^2 \\ &= \left(1 - \frac{1}{3} \right) - (0 - 0) + \left(\frac{8}{3} - 2 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \\ &= \frac{6}{3} = 2 \end{aligned}$$

Arealet mellem funktionskurven og 1.aksen i intervallet $x \in [0, 2]$ er herved bestemt til $A = 2$.