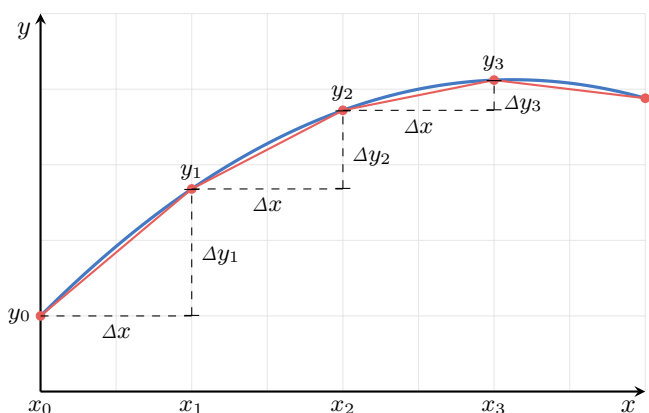


Længden af en funktionskurve

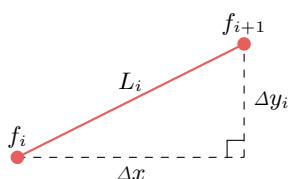
Funktioner kan anvendes i geometriske problemstillinger til at angive en bestemt kurve i et plan eller rum. Her skal dog understreges at det ikke er alle kurver der kan angives ved en funktion idet en kurve, der er angivet ved $y = f(x)$ kun kan have én y -værdi for hver x -værdi hvilket udelukker kurver som f.eks. en cirkel eller en vertikal linje.

For de kurver der kan angives ved en funktion giver differentialregning og integralregning, nogle effektive værktøjer til nemt at kunne beregne forskellige geometriske egenskaber ved funktionskurver. I det følgende vises hvordan integralregning kan anvendes til at beregne hhv. længden af en funktionskurve samt eventuelle arealer som kurven afgrænser.

Til at beregne længden af en funktionskurve der er givet ved funktionen f betragtes den tilsvarende stykvis lineæriserede funktion l hvor funktionen er inddelt i intervaller af længden Δx og herefter tilnærmet med linjestykker. Et af de vigtigste resultater fra matematisk analyse er at den lineærisedede funktion l konvergerer mod den oprindelige funktion f når Δx bliver uendelig lille. Længden af f kan således bestemmes ved at betragte grænseværdien for længden af l når Δx bliver uendelig lille.



Længderne af de enkelte linjestykker L_i kan beregnes som hypotenusen af den retvinklede trekant, der dannes ved kateterne med længderne Δx og Δy_i :



Til at beregne længden af linjestykket L_i bruges Pythagoras sætning:

$$L_i = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y_i^2}$$

Nu anvendes at længden Δy_i også kan bestemmes af linjestykkets hældning og Δx ved $\Delta y_i = l'_i \cdot \Delta x$. Dette giver:

$$\begin{aligned} L_i &= \sqrt{\Delta x^2 + (l'_i \cdot \Delta x)^2} = \sqrt{\Delta x^2 + l_i'^2 \cdot \Delta x^2} \\ &= \sqrt{(1 + l_i'^2) \cdot \Delta x^2} = \sqrt{1 + l_i'^2} \cdot \Delta x \end{aligned}$$

Længden af funktionskurven L bestemmes nu som grænseværdien af summen af alle linjestykkernes længder L_i når Δx bliver uendelig lille:

$$L = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\sum_{i=\frac{a}{\Delta x}+1}^{\frac{b}{\Delta x}} L_i \right)$$

Ved at indsætte det fundne udtryk for linjestykkernes længde kan grænseværdien omskrives som et kontinuert bestemt integral ved:

$$L = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\sum_{i=\frac{a}{\Delta x}+1}^{\frac{b}{\Delta x}} \sqrt{1 + l_i'^2} \cdot \Delta x \right) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \cdot dx$$

Resultatet opsummeres i følgende sætning:

Længden af en funktionskurve

For en funktionskurve givet i intervallet $x \in [a, b]$ ved $y = f(x)$, er den samlede længde af funktionskurven i det angivne interval, givet ved:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \cdot dx$$