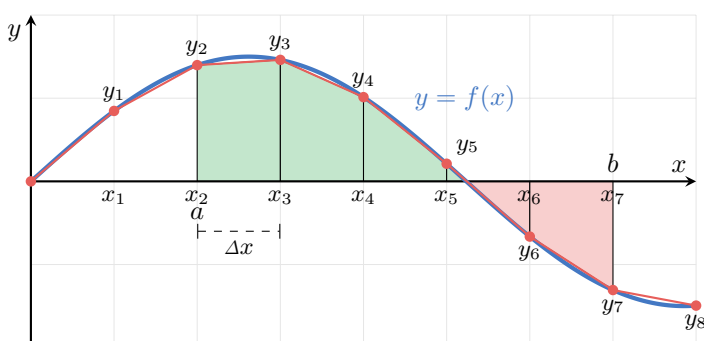


Bestemte integraler og kumuleret værdi

En anden måde at betragte det bestemte integrale på er som en slags kumulerede værdi af en tæthedsfunktion. Af eksempler herfor kan man evt. nævne den kumulerede frekvens eller den kumulerede sandsynlighed fra hhv. statistik og sandsynlighedsregning.

For at beregne den kumulerede værdi af en tæthedsfunktion kan man igen betragte den tilnærmede funktion af linjestykker som vist i figuren nedenfor. Her er den kumulerede værdi af funktionen, fra $a = x_2$ til $b = x_7$, vist som det farvede område mellem 1.aksen og funktionen af linjestykker. Positive funktionsværdier, som er vist med de grønne områder, bidrager positivt til den kumulerede værdi hvorimod negative funktionsværdier, som er vist med røde områder, bidrager negativt til den kumulerede værdi.



Idet funktionsværdien for den tilnærmede funktion af linjestykker i hvert interval er lineært varierende, kan den kumulerede værdi for hvert interval beregnes ved middelværdien af de to funktionsværdier ganget med intervallængden Δx . For interval mellem x_2 og x_3 kan den kumulerede værdi af tæthedsfunktionen således beregnes ved:

$$\frac{y_2 + y_3}{2} \cdot \Delta x = \frac{f(x_2) + f(x_2 + \Delta x)}{2} \cdot \Delta x$$

Her er anvendt at punkternes y -værdi kan bestemmes som en funktionsværdi ved hhv. $y_2 = f(x_2)$ og $y_3 = f(x_3) = f(x_2 + \Delta x)$.

Lægges nu alle intervallerne fra en startværdi $x = a$ til en slutværdi $x = b$ sammen opnås den diskrete sum:

$$\sum_{i=\frac{a}{\Delta x}+1}^{\frac{b}{\Delta x}} \frac{f(x_i) + f(x_i + \Delta x)}{2} \cdot \Delta x$$

Denne diskrete sum beregner altså den kumulerede værdi af den tilnærmede tæthedsfunktion af linjestykker. For at opnå en kontinuær sum for selve funktionen f bestemmes grænseværdien af udtrykket:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\sum_{i=\frac{a}{\Delta x}+1}^{\frac{b}{\Delta x}} \frac{f(x_i) + f(x_i + \Delta x)}{2} \cdot \Delta x \right) = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

For at beregne grænseværdien er der for integranden anvendt at:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_i) + f(x_i + \Delta x)}{2} \right) = \frac{f(x_i) + f(x_i)}{2} = \frac{2 \cdot f(x_i)}{2} = f(x_i)$$

Det er altså heraf fundet at den kumulerede funktionsværdi netop kan beregnes ved det bestemte integrale:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx$$

At det bestemte integrale kan betragtes som en kumuleret værdi af en funktion gør at man netop kan anvende denne til også at beregne andre egenskaber for en funktion, eksempelvis den gennemsnitlige funktionsværdi.

Den gennemsnitlige funktionsværdi

Den gennemsnitlige funktionsværdi $\bar{f}_{[a,b]}$ i intervallet $x \in [a, b]$ kan beregnes ved:

$$\bar{f}_{[a,b]} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) \cdot dx$$

Andre eksempler på anvendelse af det bestemte integrale til at beregne egenskaber af en givet funktion er beregningen af en fordelingsfunktions middelværdi og varians.

Middelværdi og varians af kontinuære fordelinger

For en kontinuær fordelingsfunktion f kan middelværdien μ beregnes som det 1. moment ved:

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot dx$$

Variansen σ^2 kan på tilsvarende vis beregnes som det 2. moment ved:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) \cdot dx$$