

Regneregler for bestemte integraler

Regnereglerne for ubestemte integraler gælder ligeledes for bestemte integraler. Derudover gælder der følgende regler for hvordan man håndterer intervallet af det bestemte integrale:

Regneregler for bestemte integraler

1. *Integrale af et ikke-interval:*

$$\int_a^a f(x) \cdot dx = 0$$

2. *Ombytning af grænser:*

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = - \int_b^a f(x) \cdot dx$$

3. *Indskudsreglen:*

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \int_a^c f(x) \cdot dx + \int_c^b f(x) \cdot dx$$

Reglerne kan bevises forholdsvis nemt ved brug af integralregningens hovedsætning. F.eks. for indskudsreglen kan det ses at:

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x) \cdot dx + \int_c^b f(x) \cdot dx &= F(c) - F(a) + F(b) - F(c) \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x) \cdot dx \end{aligned}$$

For at illustrere hvordan regneregler for bestemte integraler typisk anvendes fremsættes følgende eksempel.

Følgende bestemte integrale skal bestemmes hvor forskriften for funktionen f er stykvis defineret ved:

$$\int_{-1}^1 f(x) \cdot dx \quad \text{hvor} \quad f(x) = \begin{cases} 2 \cdot x + 2 & \text{for } x < 0 \\ -2 \cdot x + 2 & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$$

Idet funktionen har forskellige forskrifter før og efter $x = 0$ opdeles det bestemte integrale jf. indskudsreglen ved:

$$\int_{-1}^1 f(x) \cdot dx = \int_{-1}^0 f(x) \cdot dx + \int_0^1 f(x) \cdot dx$$

Herefter kan funktionsforskriften indsættes og værdien udregnes:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) \cdot dx &= \int_{-1}^0 (2 \cdot x + 2) \cdot dx + \int_0^1 (-2 \cdot x + 2) \cdot dx \\ &= \left[\int (2 \cdot x + 2) \cdot dx \right]_{-1}^0 + \left[\int (-2 \cdot x + 2) \cdot dx \right]_0^1 \\ &= \left[x^2 + 2 \cdot x \right]_{-1}^0 + \left[-x^2 + 2 \cdot x \right]_0^1 \\ &= (0^2 + 2 \cdot 0) - ((-1)^2 + 2 \cdot (-1)) + (-1^2 + 2 \cdot 1) \\ &\quad - (-0^2 + 2 \cdot 0) \\ &= 0 - (-1) + 1 - 0 = 2 \end{aligned}$$

Det bestemte integrale er således bestemt til:

$$\int_{-1}^1 f(x) \cdot dx = 2$$