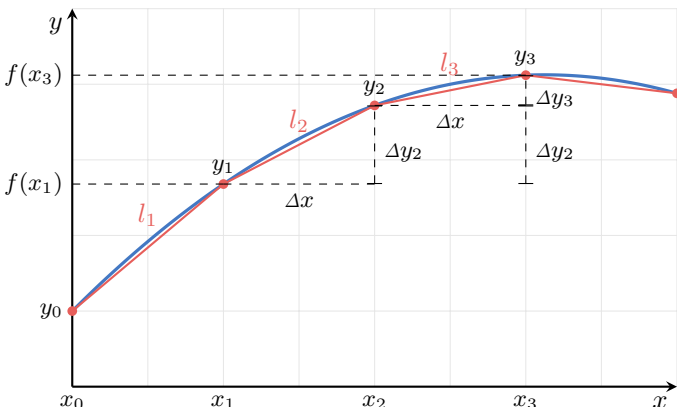


Bestemte integraler

Ved det *bestemte integrale* ønskes det at bestemme differencen mellem to funktionsværdier af den oprindelige funktion f mellem to specifikke variabelværdier $x = a$ og $x = b$.

Dette kan gøres ved igen at betragte en funktionskurve af en funktion f (blå kurve) samt dens tilnærmede funktion af linjestykker l (røde punkter og linjer) som vist i figuren nedenfor.



Ønskes det f.eks. at bestemme differencen mellem $f(x_1)$ og $f(x_3)$ ses det på figuren at denne kan bestemmes ved

$$\begin{aligned} f(x_3) - f(x_1) &= \Delta y_2 + \Delta y_3 \\ &= l'_2 \cdot \Delta x + l'_3 \cdot \Delta x \end{aligned}$$

Det ses heraf, at der er tale om at summere linjestykkernes hældning ganget med Δx . Hvis man generaliserer dette til intervallet fra $x = a$ til $x = b$ hvor Δx er valgt således at både $\frac{a}{\Delta x}$ og $\frac{b}{\Delta x}$ er heltal, vil den diskrete summation se således ud:

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=\frac{a}{\Delta x}+1}^{\frac{b}{\Delta x}} l'_i \cdot \Delta x$$

Den diskrete sum kan dog kun beregne udvalgte funktionsværdier men altså ikke selve funktionsforskriften $f(x)$ og den kræver ligeledes, at man har kendskab til hældningen af alle linjestykkerne $l'_1, l'_2, \dots$, hvilket sjældent er tilfældet.

Ligesom for det ubestemte integrale løses begge disse ulemper ved at beregne grænseværdien af den diskrete summation hvor intervallængden Δx er uendelig lille:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\sum_{i=\frac{a}{\Delta x}+1}^{\frac{b}{\Delta x}} l'_i \cdot \Delta x \right) = \int_a^b f'(x) \cdot dx$$

Grænseværdien kaldes den *kontinuære* sum hvor notationen er en udbygning af notationen for det ubestemte integrale hvor der nu sættes et interval så det kan ses at der skal summeres fra $x = a$ til $x = b$.

Forskellen i funktionsværdierne $f(b)$ og $f(a)$ kan altså bestemmes ved det *bestemte* integrale af dens afledte funktion f' for intervallet $[a, b]$:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) \cdot dx$$

Såfremt man anvender notationen for stamfunktioner skrives relationen mellem stamfunktion F og det bestemte integrale af f som:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

Denne relation kan også anvendes som en metode til at beregne det bestemte integrale af en funktion f hvis man har kendskab til stamfunktionen F ved det der ofte kaldes integralregningens grundsætning.

Integralregningens grundsætning

Det bestemte integrale over intervallet hvor $x \in [a, b]$ kan beregnes som differencen mellem stamfunktionens funktionsværdier ved hhv. $x = b$ og $x = a$:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = F(b) - F(a)$$

Læg mærke til, at når det *ubestemte* integrale af en funktion skal bestemmes fås endnu en funktion, men når det *bestemte* integrale skal bestemmes fås en talværdi da der er tale om differencen mellem to funktionsværdier af stamfunktionen.

En lidt mere eksplicit repræsentation af det bestemte integrale over intervallet hvor $x \in [a, b]$ er givet ved:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \cdot dx &= \left[\int f(x) \cdot dx \right]_a^b \\ &= \left[\int f(x) \cdot dx \right]_b - \left[\int f(x) \cdot dx \right]_a \end{aligned}$$

De firkantede parenteser betyder, at udtrykket inde i parentesen skal udregnes for den værdi der står som parentesens underskrift dvs. a eller b .

For at illustrere hvordan et bestemt integrale udregnes betragtes følgende integrale:

$$\int_1^4 x \cdot dx$$

Integralet udregnes ved først at bruge definitionen af det bestemte integrale:

$$\int_1^4 x \cdot dx = \left[\int x \cdot dx \right]_1^4$$

Heraf kan det ubestemte integrale inde i parentesen bestemmes:

$$\left[\int x \cdot dx \right]_1^4 = \left[\frac{1}{2} \cdot x^2 \right]_1^4$$

Herefter kan udtrykket evalueres i det angivne interval:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2} \cdot x^2 \right]_1^4 &= \left[\frac{1}{2} \cdot x^2 \right]_4 - \left[\frac{1}{2} \cdot x^2 \right]_1 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 16 - \frac{1}{2} \\ &= 7.5 \end{aligned}$$

Det bestemte integrale er således bestemt til:

$$\int_1^4 x \cdot dx = 7.5$$