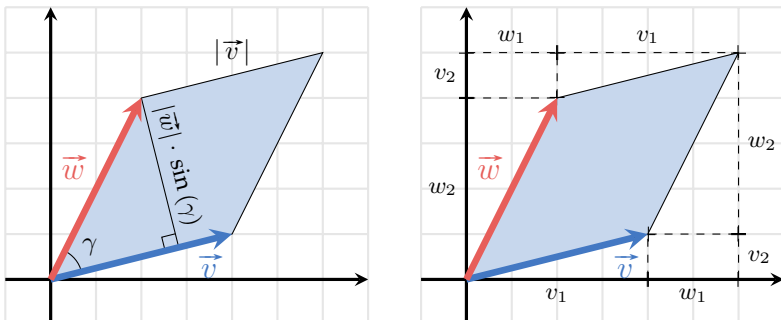


Krydsproduktet (vektorproduktet)

Krydsproduktet ($\times$), som også kaldes *vektorproduktet*, er det produkt mellem to vektorer, der benytter den *tværgående* projektion af vektorerne. Ud fra en polær repræsentation af de to vektorer ($|\vec{v}|, \alpha$) og ($|\vec{w}|, \beta$) er krydsproduktet defineret ved:

$$\vec{v} \times \vec{w} := |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin(\gamma) \quad \text{hvor} \quad \gamma = \beta - \alpha$$

For at udlede hvordan krydsproduktet beregnes når vektorerne er angivet på kartesisk form betragtes nedenstående figur, der viser hhv. den polære og den kartesiske repræsentation af krydsproduktet.



Det ses på figuren at de to vektorer udspænder et parallelogram hvor højden i parallelogrammet netop udgøres af den tværgående projektion af vektor $\vec{w}$ på $\vec{v}$. Arealet af parallelogrammet, der beregnes som højde gange grundlinje, kan således bestemmes ud fra den polære form ved:

$$A = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin(\gamma)$$

En anden måde at udregne arealet af parallelogrammet er, at udregne arealet af den omskrevne firkant og trække arealet af de fire trekanter samt to firkanter fra:

$$\begin{aligned} A &= (v_1 + w_1) \cdot (v_2 + w_2) - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot v_1 \cdot v_2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot w_1 \cdot w_2 - 2 \cdot w_1 \cdot v_2 \\ &= v_1 \cdot v_2 + v_1 \cdot w_2 + w_1 \cdot v_2 + w_1 \cdot w_2 - v_1 \cdot v_2 - w_1 \cdot w_2 - 2 \cdot w_1 \cdot v_2 \\ &= v_1 \cdot w_2 - w_1 \cdot v_2 \end{aligned}$$

De to ligninger for parallelogrammets areal sættes nu sammen til:

$$|\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin(\gamma) = v_1 \cdot w_2 - w_1 \cdot v_2$$

Heraf bemærkes at venstresiden af ligningen netop udgør krydsproduktet og højresiden består af et udtryk med vektorens kartesiske komponenter. Krydsproduktet kan således udregnes på kartesisk form ved:

$$\vec{v} \times \vec{w} = v_1 \cdot w_2 - w_1 \cdot v_2$$

Her skal det fremhæves, at denne formel udelukkende angiver krydsproduktet for todimensionelle vektorer. For tredimensionelle vektorer vil resultatet af krydsproduktet være en vektor.

Yderligere skal der ifbm. udledningen af krydsproduktet nævnes, at der her implicit er antaget, at krydsproduktet er et positivt tal der direkte udgør arealet af det udspændte parallelogram. Dette er også tilfældet når $\alpha \leq \beta$ men såfremt $\alpha > \beta$ vil $\gamma < 0$ og derved vil krydsproduktet ligeledes være negativt. Dette ændrer dog ikke på de udledte formler for krydsproduktet, der er gyldige uanset, men det fremførte bevis er formelt set kun gyldigt når $\alpha \leq \beta$.

Eksempel polær form

For at vise hvordan krydsproduktet på polær form anvendes betragtes eksemplet hvor to vektorer er givet ved på polær form:

$$\vec{v} = (2, 30^\circ) \quad \text{og} \quad \vec{w} = (3, 90^\circ)$$

Krydsproduktet kan heraf beregnes ved:

$$\vec{v} \times \vec{w} = 2 \cdot 3 \cdot \sin(90^\circ - 30^\circ) \approx 2 \cdot 3 \cdot 0.866 \approx 5.196$$

Heraf ses at prikproduktet $\vec{v} \times \vec{w} \approx 5.196$.

Eksempel kartesisk form

For at vise hvordan krydsproduktet på kartesisk form anvendes betragtes eksemplet hvor to vektorer er givet ved på kartesisk form:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Krydsproduktet kan heraf beregnes ved:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 - (-5) \cdot 4 = 6 + 20 = 26$$

Heraf ses at krydsproduktet $\vec{v} \times \vec{w} = 26$.