

Vinklen mellem to vektorer

Indledningsvis betragtes den polære form af prikproduktet og krydsproduktet mellem to vektorer $\vec{v}$ og $\vec{w}$, der er givet ved:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\gamma) \quad \text{og} \quad \vec{v} \times \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin(\gamma)$$

Af kendskab til cosinus- og sinusfunktionens funktionsværdier til forskellige vinkler kan man allerede direkte ud fra prikproduktet udlede følgende:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} \perp \vec{w} \quad \text{Vektorerne er ortogonale.}$$

$$\vec{v} \times \vec{w} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} \parallel \vec{w} \quad \text{Vektorerne er parallelle.}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = 0^\circ \quad \text{Vektorerne er ensrettede.}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = -|\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = 180^\circ \quad \text{Vektorerne er modsat rettede.}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} > 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma < 90^\circ \quad \text{Vinklen er spids.}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} < 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma > 90^\circ \quad \text{Vinklen er stump.}$$

I ovenstående tabel er der brugt relationerne $\perp$ og $\parallel$, som angiver, at vektorerne er hhv. *ortogonale* $\perp$ (dvs. vinkelrette) eller *parallelle* $\parallel$.

For generelt at bestemme vinklen mellem to vektorer $\vec{v}$ og $\vec{w}$ betragtes ligningen for prikproduktet som omskrives til en cosinusrelation ved:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\gamma) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\gamma) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$$

Ud fra denne relation kan vinklen mellem de to vektorer herved bestemmes ved den omvendte cosinusfunktion:

$$\gamma = \arccos\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}\right)$$

Her skal dog bemærkes, at formlen altid vil give den absolutte vinkel ($\gamma \geq 0$) på grund af værdimængden for den omvendte cosinusfunktion. Med andre ord, der skelnes her ikke mellem omløbsretninger ift. vinklen mellem vektorerne.