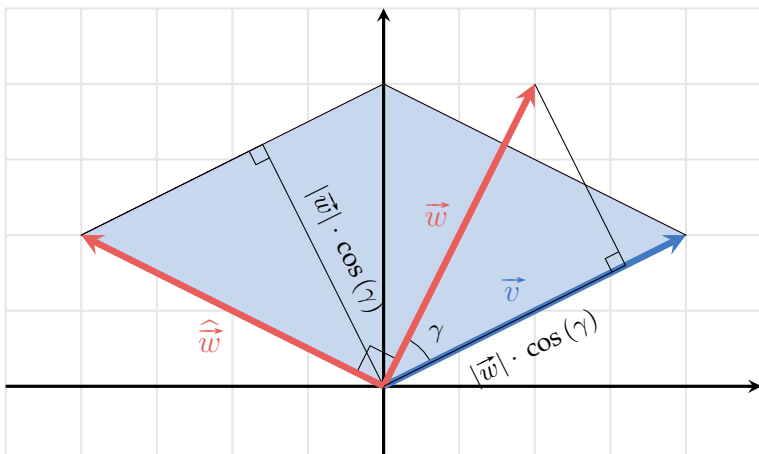


Prikproduktet (skalarproduktet)

Prikproduktet ($\cdot$), som også kaldes *skalarproduktet*, er det produkt mellem to vektorer, der benytter den *langsgående* projektion af vektorerne. Ud fra en polær repræsentation af de to vektorer $\vec{v} = (|\vec{v}|, \alpha)$ og $\vec{w} = (|\vec{w}|, \beta)$, hvor vinklen mellem vektorerne er $\gamma = \beta - \alpha$, er prikproduktet defineret ved:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\gamma)$$

For at udlede hvordan prikproduktet beregnes når vektorerne er angivet på kartesisk form, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$, betragtes nedenstående figur, hvor tværvektoren $\hat{\vec{w}}$ er indtegnet.



Af figuren kan ses, at det parallelogram, der er udspændt af vektor $\vec{v}$ og tværvektor $\hat{\vec{w}}$ har højden $|\vec{w}| \cdot \cos(\gamma)$ og grundlinje $|\vec{v}|$. Arealet af parallelogrammet mellem $\vec{v}$ og $\hat{\vec{w}}$ kan således beregnes ved samme udtryk som udgør prikproduktet mellem vektorerne $\vec{v}$ og $\vec{w}$:

$$A = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\gamma) = \vec{v} \cdot \vec{w}$$

Som bekendt kan arealet ligeledes beregnes ved krydsproduktet som:

$$A = \vec{v} \times \hat{\vec{w}} = v_1 \cdot \hat{w}_2 - \hat{w}_1 \cdot v_2$$

Ved at sætte de to udtryk for arealet lig hinanden opnås følgende ligning for prikproduktet:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 \cdot \hat{w}_2 - \hat{w}_1 \cdot v_2$$

Den kartesiske form af tværvektoren $\hat{\vec{w}} = \begin{pmatrix} -w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}$ kan nu anvendes til at opnå et udtryk udelukkende med komponenterne fra hhv. vektor $\vec{v}$ og $\vec{w}$:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 \cdot w_1 - (-w_2) \cdot v_2 = v_1 \cdot w_1 + w_2 \cdot v_2$$

Der er herved udledt, at prikproduktet kan beregnes på kartesisk form ved følgende sætning:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2$$

Her bemærkes, at selvom $\vec{v}$ og $\vec{w}$ er vektorer bliver resultatet af prikproduktet et reelt tal og altså *ikke* en vektor. Modsat krydsproduktet gælder dette også for vektorer i højere dimensioner end to.

Eksempel polær form

For at vise hvordan prikproduktet på polær form anvendes betragtes eksemplet hvor to vektorer er givet ved på polær form:

$$\vec{v} = (2, 30^\circ) \quad \text{og} \quad \vec{w} = (3, 90^\circ)$$

Prikproduktet kan heraf beregnes ved:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 2 \cdot 3 \cdot \cos(90^\circ - 30^\circ) = 2 \cdot 3 \cdot 0.5 = 3$$

Heraf ses at prikproduktet $\vec{v} \cdot \vec{w} = 3$.

Eksempel kartesisk form

For at vise hvordan prikproduktet på kartesisk form anvendes betragtes eksemplet hvor to vektorer er givet ved på kartesisk form:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Prikproduktet kan heraf beregnes ved:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-5) + 4 \cdot 3 = -10 + 12 = 2$$

Heraf ses at prikproduktet $\vec{v} \cdot \vec{w} = 2$.