

Rotation af vektorer

Modsatrettede vektorer (negative vektorer)

I afsnittet om regnereglerne for de reelle tal blev det vist hvordan begrebet om et fortegn kunne udvide talbegrebet fra at være absolutte til at være relative størrelser. Ydermere blev det vist, at en negative værdi f.eks. -1 svarede til at spejle vektoren af den tilsvarende positive talværdi 1 omkring nulpunktet. Dette gælder ligeledes for en vektor hvor en negative vektor svarer til en direkte modsat rettet vektor af samme længde.

For en vektor på polær form $\vec{v} = (|\vec{v}|, \alpha)$ kan den tilsvarende negative vektor altså nemt beregnes ved at lægge 180° til retningsvinklen:

$$\vec{v} = (|\vec{v}|, \alpha) \Rightarrow -\vec{v} = (|\vec{v}|, \alpha + 180^\circ)$$

Ved brug af omregningsformlen for en vektor fra polær form til kartesisk form kan den negative vektor ligeledes udledes på kartesisk form:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha) \\ |\vec{v}| \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix} \Rightarrow -\vec{v} = \begin{pmatrix} |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha + 180^\circ) \\ |\vec{v}| \cdot \sin(\alpha + 180^\circ) \end{pmatrix}$$

Det fremhæves nu, at der for de trigonometriske funktioner gælder at:

$$\cos(\alpha + 180^\circ) = -\cos(\alpha) \quad \text{og} \quad \sin(\alpha + 180^\circ) = -\sin(\alpha)$$

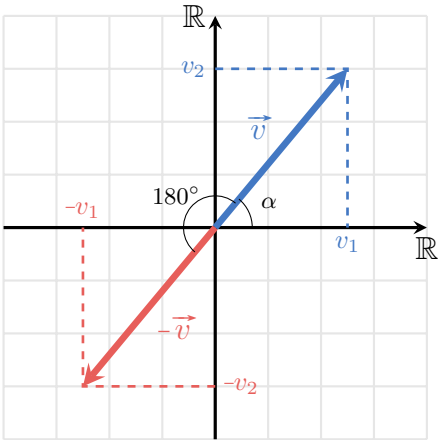
Denne egenskab udnyttes nu til at omskrive udtrykkene for komponenterne for den negative vektor:

$$-\vec{v} = \begin{pmatrix} |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha + 180^\circ) \\ |\vec{v}| \cdot \sin(\alpha + 180^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\vec{v}| \cdot (-\cos(\alpha)) \\ |\vec{v}| \cdot (-\sin(\alpha)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -|\vec{v}| \cdot \cos(\alpha) \\ -|\vec{v}| \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

Sammenlignet med det oprindelige udtryk for komponenterne af vektor $\vec{v}$, kan det nu konkluderes, at den tilsvarende negative vektor kan bestemmes ved:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow -\vec{v} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix}$$

Afbilledet i et koordinatsystem som vist nedenfor kan det ses, at det negative fortegn netop resulterer i en modsat rettet vektor af samme længde.



Tværvektorer (vinkelrette vektorer)

For en givet vektor $\vec{v}$ er en *tværvektor* $\hat{\vec{v}}$ den tilsvarende vektor, der er roteret 90° i positiv omløbsretning (dvs. mod uret). Tværvektoren $\hat{\vec{v}}$ står dermed vinkelret på selve vektoren $\vec{v}$ og har samme længde $|\vec{v}|$.

For en vektor på polær form $\vec{v} = (|\vec{v}|, \alpha)$ kan den tilsvarende tværvektor altså nemt beregnes ved at lægge 90° til retningsvinklen:

$$\vec{v} = (|\vec{v}|, \alpha) \Rightarrow \hat{\vec{v}} = (|\vec{v}|, \alpha + 90^\circ)$$

For at bestemme den tilsvarende formel for den kartesiske form bruges omregningsformlen for en vektor fra polær form til kartesisk form:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha) \\ |\vec{v}| \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{\vec{v}} = \begin{pmatrix} |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha + 90^\circ) \\ |\vec{v}| \cdot \sin(\alpha + 90^\circ) \end{pmatrix}$$

Det fremhæves nu, at der for de trigonometriske funktioner gælder at:

$$\cos(\alpha + 90^\circ) = -\sin(\alpha) \quad \text{og} \quad \sin(\alpha + 90^\circ) = \cos(\alpha)$$

Denne egenskab udnyttes nu til at omskrive udtrykkene for komponenterne for tværvektoren:

$$\hat{\vec{v}} = \begin{pmatrix} |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha + 90^\circ) \\ |\vec{v}| \cdot \sin(\alpha + 90^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\vec{v}| \cdot (-\sin(\alpha)) \\ |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -|\vec{v}| \cdot \sin(\alpha) \\ |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Sammenlignet med det oprindelige udtryk for komponenterne af vektor $\vec{v}$, kan det nu konkluderes, at en tværvektor på kartesisk form kan bestemmes ved:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{\vec{v}} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

Illustreret i et koordinatsystem som vist nedenfor kan det ses, at tværvektoren, der svarer til en rotation 90° mod uret ligeledes svarer til en ombytning af komponenterne v_1 og v_2 til hhv. $-v_2$ og v_1 .

