

Bevis for at gradienten er vinkelret på niveaukurven

At gradienten er vinkelret på niveaukurven betyder essentielt, at gradienten er vinkelret på tangenten til niveaukurven og idet tangenten er en ret linje vil det ligeledes svare til at gradienten er en normalvektor til tangentlinjen.

Først bestemmes tangentlinjen til niveaukurven i punktet (x_0, y_0, z_0) . Tangentlinjen vil være den del af tangentplanet der ligger i z_0 -planet.

$$\begin{cases} z = f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + z_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$

De to ligninger kan nu skrives sammen og reduceres:

$$\begin{aligned} z_0 &= f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + z_0 \quad \Leftrightarrow \\ 0 &= f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \end{aligned}$$

Det ses at ligningen for tangentlinjen har samme form som den generelle ligning en linje, der går gennem punktet (x_0, y_0) med normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$:

$$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) = 0$$

Sammenlignet med ligningen for tangentlinjen kan det ses at komponenterne for normalvektoren netop er givet ved komponenterne for gradienten:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} f'_x(x_0, y_0) \\ f'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \vec{\nabla} f(x_0, y_0)$$

Det er herved bevist, at gradienten er en normalvektor til niveaurkurvens tangentlinje hvilket også betyder, at gradienten er vinkelret på niveaukurven.