

Bestemmelse af minimum og maksimum

Det er ofte at man for funktioner er særligt interesseret i at bestemme såkaldte *minimum-* og *maksimumpunkter*.

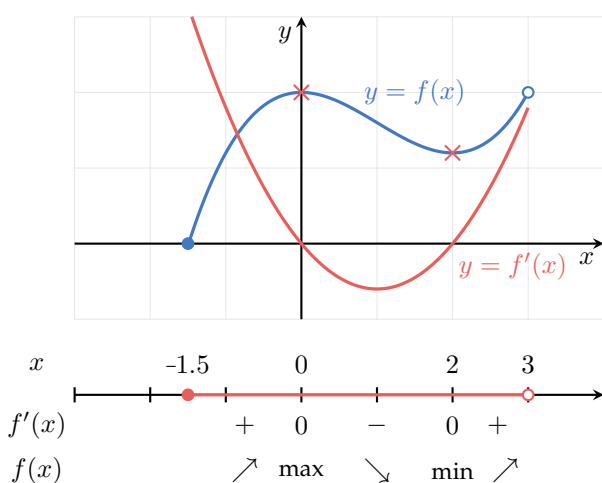
Et *minimumpunkt* er kendetegnet ved, at der for en bestemt værdi x_0 gælder, at funktionsværdien $f(x_0)$ er *mindre* end de omkringlæggende funktionsværdier. Herved vil der for alle værdier af x der ligger i omegnen af x_0 , gælde at $f(x_0) \leq f(x)$. Hvis det ydermere gælder, at $f(x_0) \leq f(x)$ for alle værdier af x i definitionsmængden af f er der tale om et *globalt minimumpunkt*.

Et *maksimumpunkt* er tilsvarende kendetegnet ved, at der for en bestemt værdi x_0 gælder, at funktionsværdien $f(x_0)$ er *større* end de omkringlæggende funktionsværdier. Herved vil der for alle værdier af x , der ligger i omegnen af x_0 , gælde at $f(x_0) \geq f(x)$. Hvis det ydermere gælder, at $f(x_0) \geq f(x)$ for alle værdier af x i definitionsmængden af f er der tale om et *globalt maksimumpunkt*.

Hvis man vil se lidt nærmere på hvad, der kendetegner hhv. minimum- og maksimumpunkter, kan man f.eks. betragte monotoniforholdet for funktionen f , der er bestemt med forskriften:

$$f(x) = x^3 - 3 \cdot x^2 + 10 \quad \text{hvor} \quad -1.5 \leq x < 3$$

Funktionens graf samt monotoniforhold er vist i figuren nedenfor, hvor det ses, at funktionen f både har et minimumpunkt samt et maksimumpunkt som er markeret med røde krydser.



Ud fra diagrammet, der viser monotoniforholdet, kan det ses at minimumspunktet ved $x = 2$ er kendetegnet ved at funktionsværdien for den afledte funktion $f'(x)$ skifter fortegn fra negativ til positiv netop ved $x = 2$. Tilsvarende kan det ses, at maksimumspunktet ved $x = 0$ er kendetegnet ved at funktionsværdien for den afledte funktion $f'(x)$ skifter fortegn fra positiv til negativ.

Det ses herudover at maksimumspunktet ved $x = 0$ er et *globalt* maksimum da der ikke er andre punkter på funktionen der har en større funktionsværdi. Der gælder således for alle x -værdier i definitionsmængden at $f(0) \geq f(x)$. Ift. minimumspunktet ved $x = 2$ kan det ses at der kun er tale om et *lokalt* minimum da der er andre punkter på funktionen hvor funktionsværdien er mindre f.eks. ved endepunktet $x = -1$ som er funktionens *globale* minimum.

Minimum

Et minimumspunkt ved x_0 er kendetegnet ved:

- For alle værdier af x , der ligger i omegnen af x_0 gælder der at $f(x_0) \leq f(x)$.
- Ved minimumpunktet x_0 skifter funktionsværdien for den afledte funktion f' fortegn fra negativ til positiv, således at:

$$f'(x_0 - \Delta x) < 0 \quad f'(x_0) = 0 \quad f'(x_0 + \Delta x) > 0$$

For et globalt minimum gælder der for alle x -værdier i definitionsmængden, at $f(x_0) \leq f(x)$.

Maksimum

Et maksimumpunkt ved x_0 er kendetegnet ved:

- For alle værdier af x , der ligger i omegnen af x_0 gælder der at $f(x_0) \geq f(x)$.
- Ved maksimumpunktet x_0 skifter funktionsværdien for den afledte funktion f' fortegn fra positiv til negativ, således at:

$$f'(x_0 - \Delta x) > 0 \quad f'(x_0) = 0 \quad f'(x_0 + \Delta x) < 0$$

For et globalt maksimum gælder der for alle x -værdier i definitionsmængden, at $f(x_0) \geq f(x)$.

Geogebra: $\text{Min}(f, x_1, x_2)$ og $\text{Max}(f, x_1, x_2)$

Når man i Geogebra har indtastet forskriften for en funktion f kan man undersøge funktionen i et interval $[x_1, x_2]$ for hhv. minimumspunkter og maksimumspunkter ved:

$$\text{Min}(f, x_1, x_2) \quad \text{og} \quad \text{Max}(f, x_1, x_2)$$