

Monotoniforhold

En funktions *monotoniforhold* angiver hvilke intervaller af funktionens definitions­mængde hvor funktionen er hhv. voksende og aftagende. Idet den afledte funktion f' angiver hældningen på stamfunktionen f er det fortegnet på den afledte funktion der bestemmer om funktionen er voksende, aftagende eller konstant.

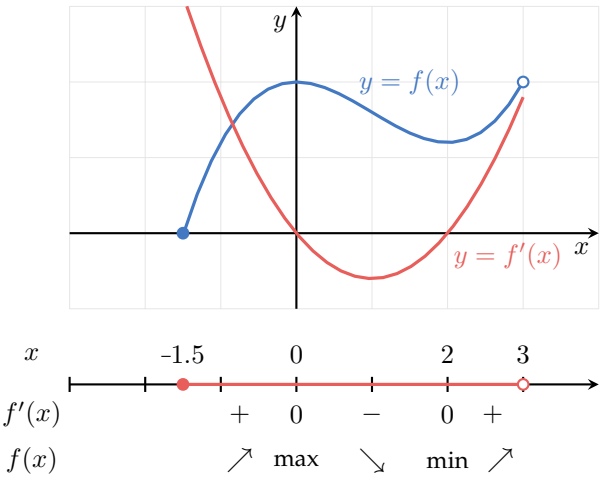
Som eksempel betragtes funktion f der er bestemt med forskriften:

$f(x) = x^3 - 3 \cdot x^2 + 10$ hvor $-1.5 \leq x < 3$

For at kunne bestemme i hvilke intervaller af variabelen x hvor funktions­værdien er hhv. voksende og aftagende, bestemmes den afledte funktion f' ved at differentiere funktionsforskriften for f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3 - 3 \cdot x^2 + 10)' \\ &= (x^3)' - 3 \cdot (x^2)' + (10)' \\ &= 3 \cdot x^2 - 6 \cdot x \end{aligned}$$

Den afledte funktion er herved bestemt til $f'(x) = 3 \cdot x^2 - 6 \cdot x$ hvor graferne for hhv. funktionen $y = f(x)$ samt dens afledte funktion $y = f'(x)$ er vist på figuren nedenfor. Under selve koordinatsystemet er der vist endnu en talakse, der viser monotoniforholdet for funktionen.



For at beregne monotoniforholdet for funktionen f bestemmes først nulpunkterne for dens afledte funktion f' , som er de værdier af x , der løser ligningen $f'(x) = 0$:

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3 \cdot x^2 - 6 \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

Nulpunkterne inddeler definitions­mængden i intervaller hvor man er sikker på at den afledte funktion har samme fortegn i hele intervallet. De to nulpunkter $x = 0$ og $x = 2$ inddeler definitions­mængden i tre intervaller I_1 , I_2 og I_3 :

$I_1 : -1.5 \leq x < 0 \quad I_2 : 0 < x < 2 \quad I_3 : 2 < x < 3$

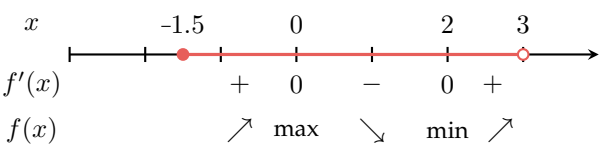
I hvert interval udvælges en værdi for x -variabelen hvor funktions­værdien for den afledte funktion beregnes:

$$\begin{aligned} I_1 : x = -1 &\Rightarrow f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) = 9 \\ I_2 : x = 1 &\Rightarrow f'(1) = 3 \cdot (1)^2 - 6 \cdot (1) = -3 \\ I_3 : x = 2.5 &\Rightarrow f'(2.5) = 3 \cdot (2.5)^2 - 6 \cdot (2.5) = 3.75 \end{aligned}$$

Idet det antages at funktionen er differentiabel i alle punkter i definitions­mængden må det også gælde at fortegnet for de beregnede værdier i de udvalgte punkter også gælder for resten af intervallerne. Monotoniforholdet kan derfor opskrives ved:

$$\begin{aligned} I_1 : -1.5 \leq x < 0 &\quad f'(x) > 0 &\quad \text{Funktionen er voksende.} \\ I_2 : 0 < x < 2 &\quad f'(x) < 0 &\quad \text{Funktionen er aftagende.} \\ I_3 : 2 < x < 3 &\quad f'(x) > 0 &\quad \text{Funktionen er voksende.} \end{aligned}$$

Monotoniforholdet kan også vises grafisk med talaksen nedenfor:



På figuren er der indtegnet en talakse hvor definitions­mængden er angivet ved den røde linje med endepunkter. Over talaksen er de relevante værdier for x angivet. Under talaksen er først den afledte funktion f' angivet med 0, + og – hvor 0 angiver nulpunkter og + og – angiver intervallerne hvor $f'(x)$ har hhv. positive og negative værdier. Til sidst er der angivet selve funktionen f med symbolerne $\nearrow \searrow$ min og max for hhv. stigende og aftagende intervaller samt minimum og maksimumspunkter.

Den ovenstående metode kan generaliseres og opsummeres i følgende sætning.

Monotoniforhold

Monotoniforholdet for en funktion f kan bestemmes ved følgende fremgangsmåde:

- 1. Bestem den forskriften for den afledte funktion $f'(x)$.
- 2. Bestem alle værdier af x , der løser ligningen $f'(x) = 0$. De fundne løsninger inddeler definitions­mængden i intervaller.
- 3. For hvert interval udvælg en tilfældig værdi x_0 tilhørende intervallet og beregn værdien $f'(x_0)$.
 - Hvis $f'(x_0) > 0$ er funktionen f voksende i intervallet.
 - Hvis $f'(x_0) < 0$ er funktionen f aftagende i intervallet.