

Differentiering

Det at bestemme differentialkvotienten, og derefter den afledte funktion, kan betragtes som en operation, der udføres på en funktion. Operationen kaldes, at man *differentierer* en funktion. Forskriften for den afledte funktion $f'(x)$ kan altså bestemmes ved at differentiere funktionens forskrift $f(x)$:

$$f'(x) = \left(f(x)\right)'$$

Selve differentieringsoperationen er noteret ved parenteserne efterfulgt af en apostrof (...)’ og det er således parentesens indhold, der skal differentieres.

Ud fra de tidligere bestemte afledte funktioner kan der således opstilles følgende tabel for differentiering af simple udtryk:

Differentiering af simple udtryk

I nedenstående tabel er differentieringen af simple udtryk angivet hvor x er udtrykkets variabel, k , n , a og b er konstanter og $e = 2.71828...$ er Eulers tal:

$(k)' = 0$	$\left(\sin(x)\right)' = \cos(x)$
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$\left(\cos(x)\right)' = -\sin(x)$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$	$\left(\log_b(x)\right)' = \frac{1}{x \cdot \ln(b)}$
$(e^x)' = e^x$	$\left(\ln(x)\right)' = \frac{1}{x}$

Såfremt der skal differentieres mere komplicerede udtryk end de simple udtryk ovenfor, er der brug for nogle generelle regneregler.

Udledningen af regneregler for differentiering illustreres her ved regnereglen for addition af to funktioner $h(x)$ og $g(x)$, der og også kan betragtes som to udtryk, der begge indeholder variabelen x . Regnereglen udledes ved at betragte grænseværdien for den afledte funktion af funktionen $h + g$:

$$\begin{aligned} \left(h(x) + g(x)\right)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\left(h(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)\right) - \left(h(x) + g(x)\right)}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \right) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right) \\ &= h'(x) + g'(x) \\ &= \left(h(x)\right)' + \left(g(x)\right)' \end{aligned}$$

Der gælder herved, at differentieringen af to adderede funktioner eller udtryk kan beregnes som summen af de to differentierede funktioner:

$$\left(h(x) + g(x)\right)' = \left(h(x)\right)' + \left(g(x)\right)'$$

Ved en tilsvarende fremgangsmåde kan det udledes, at der givet to udtryk $h(x)$ og $g(x)$ gælder følgende regneregler:

Regneregler for differentiering

For en konstant s samt to udtryk $h(x)$ og $g(x)$, der begge indeholder variabelen x , kan der opstilles følgende regneregler for differentiering:

Skaleret udtryk:

$$\left(s \cdot h(x)\right)' = s \cdot \left(h(x)\right)'$$

Adderede udtryk:

$$\left(h(x) + g(x)\right)' = \left(h(x)\right)' + \left(g(x)\right)'$$

Multipliserede udtryk:

$$\left(h(x) \cdot g(x)\right)' = \left(h(x)\right)' \cdot g(x) + h(x) \cdot \left(g(x)\right)'$$

Dividerede udtryk:

$$\left(\frac{h(x)}{g(x)}\right)' = \frac{\left(h(x)\right)' \cdot g(x) - h(x) \cdot \left(g(x)\right)'}{g(x)^2}$$

Sammensatte udtryk (Kædereglen):

$$\left(g(h(x))\right)' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

For at illustrere anvendelsen af regnereglerne for differentiering fremsættes følgende eksempler.

Eksempel med differentiering af funktion med flere led

Den afledte funktion skal bestemmes for funktionen:

$$f(x) = 2 \cdot x^2 + x - 1$$

For at bestemme den afledte funktion differentieres funktionsforskriften $f(x)$:

$$f'(x) = \left(f(x)\right)' = \left(2 \cdot x^2 + x - 1\right)'$$

Det ses at udtrykket der skal differentieres består af tre led. Disse kan opdeles jf. reglen om differentiering af adderede udtryk:

$$f'(x) = \left(2 \cdot x^2\right)' + (x)' - (1)'$$

Dernæst ses at konstanten 2 i første led kan sættes uden for differentieringen jf. reglen om differentiering af skalerede udtryk:

$$f'(x) = 2 \cdot \left(x^2\right)' + (x)' - (1)'$$

Nu er alle udtryk, der skal differentieres, simple udtryk hvor man kender de afledede udtryk som nu kan indsættes hvorefter forskriften reduceres:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot (2 \cdot x) + (1) - (0) \\ &= 4 \cdot x + 1 \end{aligned}$$

Den afledte funktion er herved bestemt til:

$$f'(x) = 4 \cdot x + 1$$