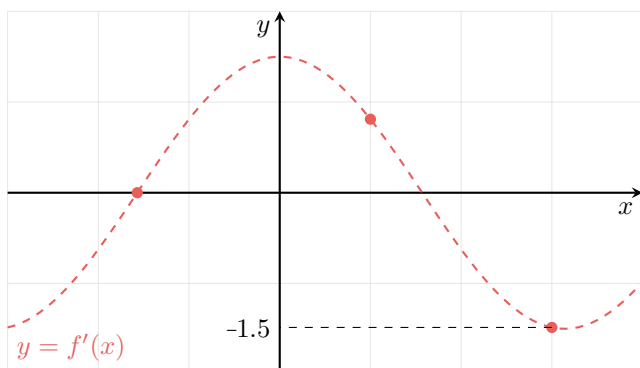
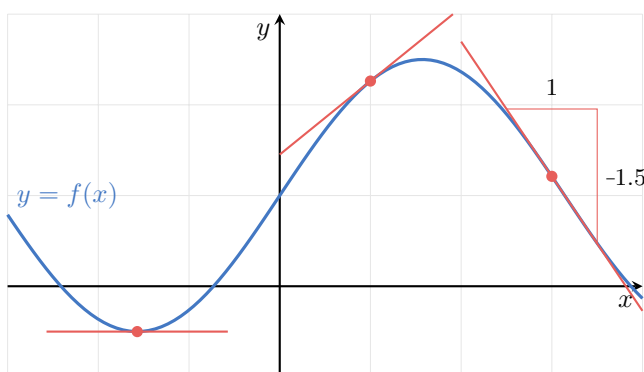


Afledte funktioner

Når man bestemmer differentialkvotienten af en funktion tager man udgangspunkt i et enkelt fikspunkt x_0 . Man kan dog vælge fikspunktet til hvilken som helst værdi i definitionsområdet for funktionen f . I figuren nedenfor ses, i den øverste graf, en funktion hvor tangentlinjen i tre forskellige punkter er vist med små linjestykker. I figurens nederste graf er hældningen, dvs. differentialkvotienten, for disse tangentlinjer afsat som punkter sammen med en stiplede linje, som viser den funktion, der angiver differentialkvotienten, dvs. hældningen, af funktionen f for hvert x -værdi.



Denne nye funktion for differentialkvotienten af f kaldes den *afledte funktion* og skrives ved f' , der læses som "f-mærke".

Algebraisk bestemmes den afledte funktion ved at indsætte variabelen x i differentialkvotienten:

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$$

Ud fra definitionen af differentialkvotienten hvor x_0 altså nu er erstattet af x opnås en formel angiver hvordan den afledte funktion f' beregnes:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)$$

Bemærk her at den eneste forskel fra formelen for differentialkvotienten er, at værdien x_0 er erstattet af variabelen x . For at beregne den afledte funktion anvendes samme fremgangsmåde som for differentialkvotienten. I forlængelse af eksemplet for beregning af differentialkvotienten af funktionen $f(x) = x^2$ beregnes nu den afledte funktion f' .

Funktionsforkriften $f(x)$ anvendes i formelen for den afledte funktion til at opnå et konkret udtryk for funktionsværdierne $f(x + \Delta x)$ og $f(x)$ hvorefter grænseværdien udregnes:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{(x + \Delta x)^2 - (x)^2}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + \Delta x^2 + 2 \cdot x \cdot \Delta x - x^2}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 2 \cdot x) = 2 \cdot x \end{aligned}$$

Forskriften for den afledte funktion er således bestemt til $f'(x) = 2 \cdot x$.

Med stort set samme fremgangsmåde kan man ligeledes bestemme den afledte funktion af mange andre funktionstyper. De mest gængse funktioners afledte funktion er opsummeret i følgende sætning.

Afledte funktioner for simple funktioner

For en funktion f kan den afledte funktion f' bestemmes i følgende tilfælde af simple funktioner.

$$f(x) = k \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

$$f(x) = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos(x)$$

$$f(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin(x)$$

$$f(x) = a^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$$

$$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x$$

$$f(x) = \log_b(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(b)}$$

$$f(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$