

## Separable differential ligninger

For nogle få differentialligninger kan løsningen udledes bare ved kendskab til regnereglerne for differentiering som f.eks. var tilfældet for eksponentielle differentialligninger. Men for at kunne løse en bredere mængde af differentialligninger er der brug for andre metoder.

En af metoderne er *separation af de variable* der kan anvendes på differentialligninger hvor man kan separere de variable på hver side af lighedstegnet. Betragtes f.eks. differentialligningen:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot f(x)$$

Som ved at introducere en hjælpevariabel  $y = f(x)$  sammen med differentialkvotienten for den afledte funktion  $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ , kan differentialligningen omskrives til:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y$$

Bemærk at der her anvendes differentialkvotienten  $\frac{dy}{dx}$  i stedet for  $y'$  da dette er nødvendigt for at kunne separere variableerne  $x$  og  $y$  i næste skridt.

For at separere variableerne  $x$  og  $y$  på hver side af ligningen behandles differentialkvotienten som en brøk af de to infinitesimaler  $dy$  og  $dx$ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y} \cdot dy = \frac{1}{2} \cdot x \cdot dx$$

For nu at bestemme stamfunktionen skal infinitesimalerne summeres op og en integrationskonstant (hhv.  $k_1$  og  $k_2$ ) ligges til:

$$k_1 + \int \frac{1}{y} \cdot dy = k_2 + \int \frac{1}{2} \cdot x \cdot dx$$

Herefter kan de ubestemte integraler på side af ligningen beregnes hvorefter variabelen  $y$  isoleres:

$$\begin{aligned} k_1 + \int \frac{1}{y} \cdot dy &= k_2 + \int \frac{1}{2} \cdot x \cdot dx \\ \Leftrightarrow \ln(y) &= k_2 - k_1 + \frac{1}{4} \cdot x^2 \\ \Leftrightarrow e^{\ln(y)} &= e^{k_2 - k_1 + \frac{1}{4} \cdot x^2} \\ \Leftrightarrow y &= e^{k_2 - k_1} \cdot e^{\frac{1}{4} \cdot x^2} \\ \Rightarrow y &= k \cdot e^{\frac{1}{4} \cdot x^2} \quad \text{hvor } k = e^{k_2 - k_1} \end{aligned}$$

Erstattes variabelen  $y = f(x)$  tilbage til funktionen er den generelle løsning herved fundet ved separation af variable til:

$$f(x) = k \cdot e^{\frac{1}{4} \cdot x^2}$$

Metoden for separation af de variable kan generaliseres til tilfælde hvor en 1. ordens differentialligning kan opskrives som produktet af to udtryk  $g$  og  $h$  af hhv.  $f(x)$  og  $x$ :

$$f'(x) = g(x) \cdot h(f(x))$$

Ved brug af hjælpevariabelen  $y = f(x)$  omskrives ligningen til:

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$$

Variablerne kan nu separeres og integreres med tillæg af en integrationskonstant  $k$  hvilket giver følgende generelle formel for separation af de variable:

$$\int \frac{1}{h(y)} \cdot dy = k + \int g(x) \cdot dx$$