

Forskudt eksponentiel vækst

Differentialligningen for *forskudt* eksponentiel vækst er en generalisering af differentialligningen for eksponentiel vækst hvor der introduceres endnu en koeficient til differentialligningen. Den nye konstant gør, at ligevægtpunktet for differentialligningen flyttes til en vilkårlig y -værdi.

Indledningsvis tilføjes konstanten c til løsningsfunktionen for eksponentiel vækst:

$$f(x) = k \cdot e^{a \cdot x} + c$$

Herfra udregnes den afledede funktion:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (f(x))' \\ &= (k \cdot e^{a \cdot x} + c)' \\ &= k \cdot (e^{a \cdot x})' + (c)' \\ &= k \cdot (a \cdot x)' \cdot e^{a \cdot x} \\ &= k \cdot a \cdot e^{a \cdot x} \end{aligned}$$

I udtrykket for den afledede funktion ses det, at udtrykket $k \cdot e^{a \cdot x}$ optræder, hvilket kan erstattes af udtrykket $f(x) - c$ idet:

$$f(x) - c = k \cdot e^{a \cdot x}$$

Der opnås herved en differentialligning på formen:

$$f'(x) = a \cdot (f(x) - c) = a \cdot f(x) - a \cdot c$$

For at få et pænere udtryk på højresiden, der samtidig udgør en lineær sammenhæng mellem $f(x)$ og $f'(x)$, introduceres konstanten $b = -a \cdot c$ hvorved følgende generelle form opnås:

$$f'(x) = a \cdot f(x) + b$$

Den generelle løsning til denne differentialligning er givet ved:

$$f(x) = k \cdot e^{a \cdot x} - \frac{b}{a}$$

Her er anvendt at $c = -\frac{b}{a}$. Differentialligninger på formen: $f'(x) = a \cdot f(x) + b$ kaldes også for *lineære* differentialligninger idet der er en lineær sammenhæng mellem den afledte funktionsværdi $f'(x)$ og selve funktionsværdien $f(x)$.

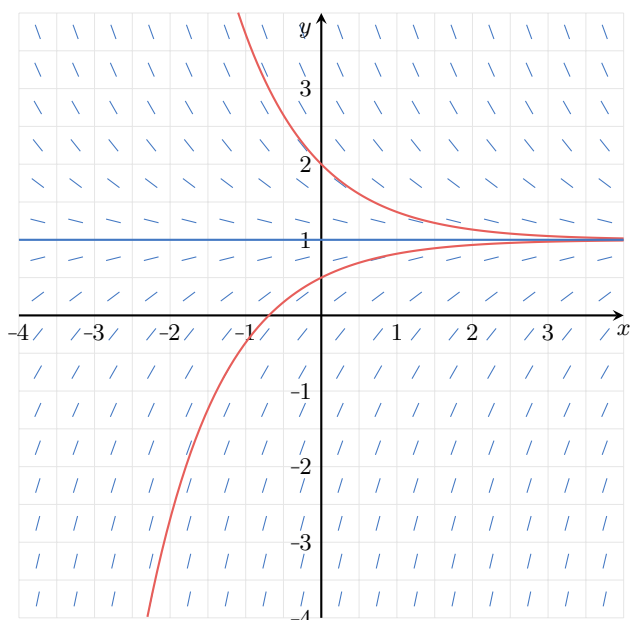
Ud fra differentialligningens generelle form kan der ligeledes bestemmes differentialligningens ligevægtpunkter. Først omskrives ligningen ved brug af hjælpevariablerne $y = f(x)$ samt $y' = f'(x)$ til:

$$y' = a \cdot y + b$$

Hernæst sættes $y' = 0$ og ligningen løses for y :

$$0 = a \cdot y + b \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{b}{a}$$

Differentialligningen har altså ligevægtpunkt ved $y = -\frac{b}{a}$ hvilket også ses på hældningsfeltet nedenfor. Der er i figuren ligeledes plottet to forskellige specifikke løsninger, der befinder sig på hver sin side af ligevægtpunktet som i dette tilfælde er et stabilt ligevægtpunkt.



Den forskudte eksponentielle differentialligning også kaldet den lineære differentialligning kan nu opsummeres i følgende sætning.

Differentialligning for forskudt eksponentiel vækst

Differentialligningen der beskriver forskudt eksponentiel vækst har den generelle form:

$$f'(x) = a \cdot f(x) + b$$

Den generelle/fuldstændige løsning til differentialligningen er:

$$f(x) = k \cdot e^{a \cdot x} - \frac{b}{a}$$

Talværdien af k er betydende for skæringsværdien på 2.aksen idet $f(0) = k - \frac{b}{a}$.

Differentialligningen har ligevægtpunkt i $y = -\frac{b}{a}$ og fortegnet for koeficienten a bestemmer om ligepunktet er ustabil ($a > 0$) eller stabilt ($a < 0$) hvilket vil sige om løsningskurven er voksende eller aftagende.