

Algebraiske ligningssystemer

Det sker ofte i matematiske problemstillinger at man arbejder med ligninger der har mere end én ubekendt variabel. Hvis et æble f.eks. koster 2 kr vil den samlede pris y afhænge af antallet af æbler der købes jf. ligningen:

$$y = 2 \cdot x$$

Til denne ligning er der ikke kun én men uendelig mange løsninger idet det hverken er specificeret hvor mange æbler der købes eller den samlede pris. Løsningen kan således enten være $(x, y) = (1, 2)$ eller $(x, y) = (2, 4)$ eller $(x, y) = (3, 6)$ osv. – altså uendelig mange løsninger.

For at opnå én entydig løsning skal der altså være en yderligere betingelse der bestemmer hvilken løsning der gælder. F.eks. kunne man sige at man ville købe 3 æbler og derved tilføje informationen $x = 3$ således at der opnås de sammensatte udsagn:

$$y = 2 \cdot x \quad \wedge \quad x = 3$$

Der er nu tale om to ligninger der begge skal være opfyldt. Dette kan ligeledes skrives ved nedenstående notation:

$$\begin{cases} y = 2 \cdot x \\ x = 3 \end{cases} \quad \equiv \quad y = 2 \cdot x \quad \wedge \quad x = 3$$

Idet begge ligninger skal være opfyldt og i kraft af at den ene ligning direkte angiver $x = 3$ er den eneste løsning til ligningen talparret $(x, y) = (3, 6)$.

Dette er et eksempel på et *ligningssystem* bestående af et givet antal ligninger, hvori der optræder et givet antal ubekendte. For et algebraisk ligningssystem af 1. grad hvor der er m ligninger med n ubekendte kan det opstilles på generel normalform som:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

Her udgør $\{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}\}$ koefficienterne for de n ubekendte variable $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ i hver af de m ligninger med de tilhørende højresider $\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$.

Et ligningssystem benævnes som *bestemt* når der er én entydig løsning til ligningssystemet og *ubestemt* når der er ingen eller flere løsninger. En generel betingelse for, at et ligningssystem er bestemt er, at der er lige mange ligninger og variable dvs. $n = m$.

For at løse et ligningssystem findes flere metoder der bygger på forskellige principper. De mest anvendte gennemgås i de følgende afsnit.

Den grafiske løsningsmetode

For ligningssystemer der indeholder 2 eller højst 3 ubekendte variable kan der anvendes en grafisk løsningsmetode ved at indtegne de to ligninger i et koordinatsystem hvor talakserne repræsenterer de ubekendte variable.

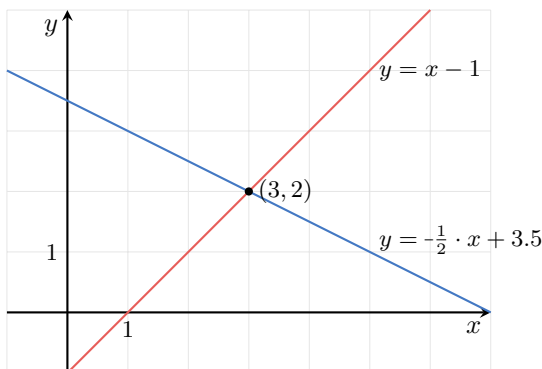
Givet ligningssystemet:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ -x = 2 \cdot y - 7 \end{cases}$$

Her kan ligningerne omskrives til en form hvor y -variablen er angivet direkte ved et udtryk af x -variablen:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ -x = 2 \cdot y - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ y = -\frac{1}{2} \cdot x + 3.5 \end{cases}$$

Ved brug af denne form kan de to ligninger nu afbildes i et xy -koordinatsystem som vist nedenfor. Her kan ses at de to ligninger, som i dette tilfælde udgør to rette linjer, skærer hinanden i punktet $(x, y) = (3, 2)$. Dette skæringspunkt udgør således en løsning der opfylder begge ligninger.



Grafiske løsningsmetoder er således en simpel metode til at løse et ligningssystem på, som dog har sine begrænsninger. For det første skal man afsøge hele koordinatsystemet for evt. skæringspunkter hvilket kan være en kompliceret opgave. For det andet kræver denne metode at hver ubekendt har sin egen talakse hvilket begrænser metoden til ligningssystemer med to eller højst tre variable.