

Den ene omvendte regneart til potens er *rod*. Denne regneart er tiltænkt som en direkte måde at løse for variabelen  $x$  i ligningen:

$$x^n = a \Rightarrow x = \sqrt[n]{a}$$

Anvendes potensregnereglerne til at omskrive ligningen  $x^n = a$  kan dette gøres ved opløfte begge sider af ligningen til den  $\frac{1}{n}$ 'te potens:

$$x^n = a \Rightarrow (x^n)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \Rightarrow x^{\frac{n}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow x = a^{\frac{1}{n}}$$

Sammenlignet med den første angivelse af rodregnearten  $x = \sqrt[n]{a}$  opnås følgende definition:

$$\sqrt[n]{a} := a^{\frac{1}{n}} \quad \text{hvor } n \neq 0$$

Ud fra denne definition ses det, at definitionen for rod udgør den omvendte regneart til potens idet:

$$\sqrt[n]{a^n} = (a^n)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$$

At beregne en rod er dog generelt set en forholdsvis kompleks beregning at foretage i hånden idet det handler om at løse ligningen  $x^n = a$ . Såfremt der er tale om at beregne roden af "nemme tal" såsom  $\sqrt[2]{4}$  er det forholdsvis nemt at finde en løsning til  $x^2 = 4$  ved  $x = 2$ . Andre af de "nemme tal" ift. kvadratrod og kubikrod er vist i tabellen nedenfor som viser relationen mellem at løse ligningen  $x^n = a$  og beregne værdien af  $\sqrt[n]{a}$ . Det er dog betydeligt sværere at beregne værdien af  $\sqrt[2]{4.1}$  hvor ligningen  $x^2 = 4.1$  skal løses. I dette tilfælde findes numeriske metoder (såsom Newton-Raphsons metode) der effektivt kan beregne en rod i det generelle tilfælde.

$x$	...	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...	$\sqrt[2]{y}$	$\sqrt[3]{z}$
$x^2$	...	4	1	0	1	4	9	16	25	...	$y$	
$x^3$	...	-8	-1	0	1	8	27	64	125	...		$z$

Det bemærkes her at de røde tal i figuren, der ligeledes er rødder til ligningen, er dog ikke de *principale* rødder og derfor ikke lig med den værdi som opnås ved regnearten rod.

Betragtes ligningen  $x^n = a$  lidt nærmere hvor kan det dog umiddelbart ses at der kan være flere tal der løser ligningen. F.eks. hvis  $n = 2$  og  $a = 4$  kan ligningen  $x^2 = 4$  have to løsninger. Enten kan  $x = 2$  idet:

$$2^2 = 2 \cdot 2 = 4$$

eller også kan  $x = -2$ , idet:

$$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$$

Både 2 og -2 er altså rødder til ligningen, men når man taler om rod som regneart er det kun den *principale rod* der menes. For de reelle tal er den *principale rod* altid den positive rod.

Regnearten for rødder følger i store træk regnereglerne for potenser. For to vilkårlige positive talværdier  $a > 0$  og  $b > 0$  samt en vilkårlig talværdi  $n \neq 0$  gælder den distributive egenskab for rødder ift. multiplikation og division:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad \text{og} \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Roden af et potental når grundtallet er en vilkårligt positiv talværdi  $a > 0$  samt  $n \neq 0$  gælder der:

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$$

Ift. egenskaben af *lukning* gælder denne for rod såfremt  $a$  er en vilkårlig positiv talværdi  $a > 0$ . Der gælder således at roden af et positivt reelt tal ligeledes er et positivt reelt tal:

$$a \geq 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} \geq 0$$

Idet rodden essentielt består af at løse ligningen  $x^n = a$  ses det ved f.eks. at betragte den konkrete ligning  $x^2 = -1$  hvor den *principale* løsning er  $x = \sqrt{-1}$ , at der her ikke findes en løsning blandt de reelle talværdier. Med andre ord findes der ingen reelle talværdi der multipliceret med sig selv giver en negativ talværdi og der gælder således:

$$a < 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} \notin \mathbb{R}$$

Måden hvorpå man behandler rodden til en negativ talværdi er ved at introducere den imaginære enhed (betegnet  $i$ ) hvor der gælder at:

$$i1 \cdot i1 := -1$$

Bemærk her at den imaginære enhed skal betragtes på samme måde som et fortegn selvom symbolet er et bogstav. For en vilkårlig talværdi  $a$  gælder således at:

$$ia \cdot ia = -a^2$$

hvorved roden af en negativ talværdi nu kan bestemmes ved:

$$a < 0 : \sqrt{a} = i\sqrt{|a|}$$