

Generelle løsninger af algebraiske ligninger

Algebraiske 2.gradsligninger

På samme måde som en 1.gradsligning kan en 2.gradsligning, når den er skrevet på normalform, generaliseres til følgende ligning:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \quad \text{hvor} \quad a \neq 0$$

Den overordnede strategi for at udlede den generelle løsning til 2.gradsligningen er at omskrive den generelle form af ligningen ved brug af en kvadratsætning. Det første skridt heri er at skalere ligningen med faktoren $4 \cdot a$ og dernæst forlænge ligningen med b^2 :

$$\begin{aligned} a \cdot x^2 + b \cdot x + c &= 0 \\ \Leftrightarrow 4 \cdot a^2 \cdot x^2 + 4 \cdot a \cdot b \cdot x + 4 \cdot a \cdot c &= 0 \\ \Leftrightarrow 4 \cdot a^2 \cdot x^2 + 4 \cdot a \cdot b \cdot x + 4 \cdot a \cdot c + b^2 &= b^2 \\ \Leftrightarrow (2 \cdot a \cdot x)^2 + b^2 + 2 \cdot (2 \cdot a \cdot x) \cdot b &= b^2 - 4 \cdot a \cdot c \end{aligned}$$

Det kan heraf ses at venstresiden af ligningen kan omskrives ved 1.kvadratsætning til kvadratet af en sum bestående af ledene $2 \cdot a \cdot x$ samt b :

$$\begin{aligned} (2 \cdot a \cdot x)^2 + b^2 + 2 \cdot (2 \cdot a \cdot x) \cdot b &= b^2 - 4 \cdot a \cdot c \\ \Leftrightarrow (2 \cdot a \cdot x + b)^2 &= b^2 - 4 \cdot a \cdot c \end{aligned}$$

Herefter tages kvadratrodden på begge sider af ligningen, hvilket resulterer i to forskellige ligninger - én hvor højresiden har et positivt fortegn og én hvor højresiden har et negativ fortegn.

Først betragtes den løsning hvor højresiden har et positivt fortegn:

$$\begin{aligned} 2 \cdot a \cdot x + b &= \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c} \\ \Leftrightarrow 2 \cdot a \cdot x &= -b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{aligned}$$

Herefter betragtes den løsning hvor højresiden har et negativt fortegn:

$$\begin{aligned} 2 \cdot a \cdot x + b &= -\sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c} \\ \Leftrightarrow 2 \cdot a \cdot x &= -b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{aligned}$$

For at simplificere udtrykkene i de to løsninger introduceres en ny størrelse kaldet diskriminanten d ved:

$$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

Heraf er der opnået den generelle løsning for en 2.gradsligning som nu kan opsummeres ved følgende sætning:

For 2.gradsligning skrevet på den generelle normalform:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \quad \text{hvor} \quad a \neq 0$$

hvor en diskriminant d bestemmes ved:

$$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

er den tilsvarende generelle løsning til 2.gradsligningen givet ved:

$$x = \frac{-b + \sqrt{d}}{2 \cdot a} \quad \vee \quad x = \frac{-b - \sqrt{d}}{2 \cdot a}$$

Af den generelle løsning skal det bemærkes at diskriminanten d spiller en særlig rolle og kan bruges til at undersøge hvor mange reelle løsninger 2.gradsligningen har.

1. Hvis talværdien af diskriminanten d er positiv $d > 0$ så er der to forskellige talværdier der er løsninger til ligningen.
2. Hvis talværdien af diskriminanten d er nul $d = 0$ giver begge løsninger samme talværdi så der er derfor kun en talværdi der er løsning til ligningen.
3. Hvis diskriminanten d er negativ $d < 0$, så vil der gælde, at man ikke kan finde en reel talværdi for kvadratrodden til d . Dette vil ydermere betyde, at der ikke findes nogen talværdier blandt de reelle tal, der er løsning til ligningen. Dette kan også formuleres som at ligningen ikke har nogle reelle løsninger.