

Udtryk, udsagn og sammensatte udsagn

Matematik er på mange måder et logisk regelsæt til at opbygge og arbejde med udsagn. Et *udsagn* er en konkret påstand, der udtrykker en sammenhæng mellem flere udtryk. Et *udtryk* kan sidestilles med de enkelte ord i en sætning, som i sig selv ikke giver nogen mening med mindre det indgår i den større struktur altså et udsagn.

Til eksempel kan betragtes, et udsagn givet ved en ligning:

$$2 + 2 = 4$$

Det ses at i dette tilfælde er udsagnet tilmed er sandt. At dette er et udsagn kan ses ved at oversætte ligningen til den ækvivalente sproglige form »*To plus to er lig med fire*« som tydeligvis er en påstand der er sand. Ligningens venstreside $2 + 2$, »*To plus to*«, er et udtryk. Hvis man ydermere erstatter et af tallene med et ubekendt tal x opnås et *åbent udsagn*:

$$x + 2 = 4$$

Her afhænger udsagnets sandhed altså hvilken talværdi den ubekendte x antager. I dette tilfælde vil udsagnet således være sandt hvis $x = 2$ og usandt for alle andre talværdier.

Ud over ligninger, der er kendetegnet ved lighedsrelationen, kan matematiske udsagn også være opbygget af andre typer af relationer som f.eks. en ulighedsrelation hvor et eksempel på et konkret udsagn er $2 < 4$, der læses som »*To er mindre end fire*«.

Til at kunne opbygge et logisk ræsonnement, der involverer mere end ét udsagn, er det hensigtsmæssigt at kunne relatere flere udsagn med hinanden. Til dette kan bruges en række af *logiske operatorer* til at opstille *sammensatte udsagn* også kaldet *udsagnsformer*.

For to udsagn, f.eks. $x = 1$ og $y = 2$, er der mange måder hvor disse udsagn kan sammensættes til en udsagnsform. Den første måde er ved en *konjunktion* (symbolet $\wedge$) af de to udsagn, der forstås som et sammensat udsagn, som sprogligt kan formuleres ved:

$$x = 1 \wedge y = 2 \quad \equiv \quad \begin{array}{l} \text{Der gælder både} \\ \text{at } x = 1 \text{ og at } y = 2 \end{array}$$

Her betyder symbolet $\equiv$ at de to repræsentationsformer er logisk ækvivalente.

Den komplementære udsagnsform til en konjunktion er en *disjunktion* (symbolet $\vee$) af to udsagn f.eks. $x = -2$ og $x = 2$, der ligeledes forstås som et sammensat udsagn, som sprogligt kan formuleres ved:

$$x = -2 \vee x = 2 \quad \equiv \quad \begin{array}{l} \text{Der gælder enten} \\ \text{at } x = -2 \text{ eller at } x = 2 \end{array}$$

En anden måde at sammensætte to udsagn på er ved brug af en *implikation* (ved symbolet $\Rightarrow$). En implikation repræsenterer en relation hvor det ene udsagn er en medfølge af de andet. En simpel implikation kan forstås som det sammensatte udsagn der sprogligt kan formuleres ved:

$$x = -2 \Rightarrow x^2 = 4 \quad \equiv \quad \begin{array}{l} \text{Hvis det gælder at } x = -2 \\ \text{så gælder det at } x^2 = 4 \text{ men} \\ \text{ikke nødvendigvis omvendt.} \end{array}$$

Bemærk her, at implikationen er envejs idet udsagnet $x^2 = 4$ ikke entydigt medfører at $x = -2$ idet der også er den anden mulighed at $x = 2$.

En simpel implikation er altså en envejsrelation hvor det førstnævnte udsagn kaldes for *antecedenten* og andetnævnte udsagn kaldes for *konsekventen*. Såfremt implikationen ligeledes gælder hvis man bytter om på de to udsagn, er der tale om en *biimplikation*. En biimplikation (ved symbolet $\Leftrightarrow$) er det sammensatte udsagn, der sprogligt kan formuleres ved:

$$x + 2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \quad \equiv \quad \begin{array}{l} \text{Hvis det gælder at } x + 2 = 4 \\ \text{så gælder det at } x = 2 \text{ og} \\ \text{omvendt.} \end{array}$$

Biimplikationen er altså en tovejsimplikation idet udsagnet $x = 2$ også entydigt medfører at $x + 2 = 4$. Denne egenskab gør at biimplikationer er essentielle ift. matematiske udledninger og bevisførelse.