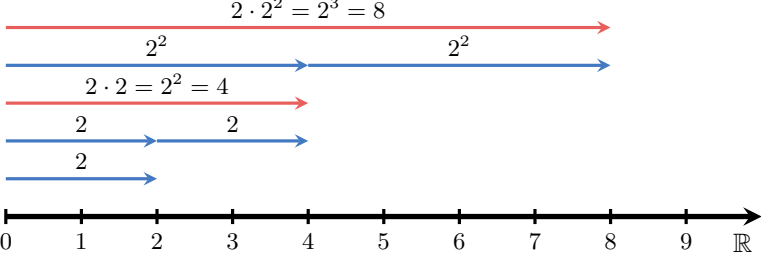


Potensregnearten

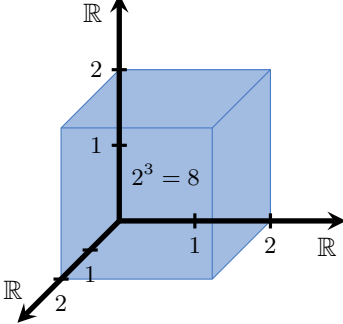
Såfremt den samme vilkårlige talværdi a er multipliceret n gange defineres en forkortet notation herfor ved at anvende et potenstal:

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

Ligesom multiplikation kan tolkes på to forskellige måder, så har potensregnearten ligeledes to fortolkninger. Den ene fortolkning er en slags "super-skalering" som er illustreret i figuren nedenfor hvor tallet 2 vises for hhv. 2. og 3. potens.



Den anden fortolkning af potens bygger på begrebet om dimensioner hvor potenstallet har relation til tallets længde, kvadrat, kubik, osv. I figuren nedenfor illustreres den 3. potens af tallet 2 som det kubiske rumfang.



Af ovenstående definition for et potenstal, kan der direkte opstilles nogle regneregler. For det første ses, at det *neutrale tal* ift. potens er tallet 1 idet der for en vilkårlig talværdi a gælder at:

$a^1 = a$

For multiplikation af to potenstal med samme grundtal a ses der, at når potensen udskrives efter ovenstående definition kan produktet af de to potenstal samles som et potenstal ved:

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_m = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n+m} = a^{n+m}$$

Heraf følger altså regnereglen:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

Ud fra denne regneregler kan det udledes at en vilkårlig talværdi a i potens 0 må være lig med multiplikationregneartens neutrale tal 1:

$$a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n \quad \Leftrightarrow \quad a^0 = \frac{a^n}{a^n} = 1$$

Der gælder således for alle reelle tal a at:

$a^0 = 1$

Dette resultat kan herefter anvendes til at udlede betydningen af en negativ potens ved at betragte multiplikation af et potenstal med et potenstal af samme grundtal a med en tilsvarende negativ potens:

$$a^n \cdot a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Heraf ses at der for en negativ potens gælder at:

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Ud fra disse identiteter for potensregnearten kan der nu udledes en regneregler for division af to potenstal med samme grundtal a :

$$\frac{a^n}{a^m} = a^n \cdot \frac{1}{a^m} = a^n \cdot a^{-m} = a^{n-m}$$

Heraf følger altså regnereglen:

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Såfremt et potenstal a^n i sig selv sættes i en givet potens m kan på tilsvarende vis udledes en regneregler herfor:

$$(a^n)^m = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n \cdot \dots \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n}_m = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \cdot m} = a^{n \cdot m}$$

Regnereglen kan således opstilles som:

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

NB. her gælder dog yderligere at hvis a repræsenterer en negativ talværdi $a < 0$ så skal talværdien for m være et heltal.

Den sidste regneregler for potensregnearten er den distributive regneregler ift. et givet produkt af to reelle talværdier a og b , som ligeledes kan eftervises ved at udskrive potenserne:

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \dots \cdot (a \cdot b)}_n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_n = a^n \cdot b^n$$

Den distributive regneregler for potensregnearten kan således opstilles som:

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad \text{og} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

De omvendte regnearter til potens

Som også vist tidligere har potensregnearten *ikke* den kommutative egenskab idet $a^n \neq n^a$. For at indse dette kan f.eks. fremhæves at $2^3 \neq 3^2$ idet $2^3 = 8$ mens $3^2 = 9$.

Den manglende kommutative egenskab gør, at der er brug for to omvendte regnearter for både at kunne "regne baglæns" når grundtallet er ukendt såvel som når potenstallet er ukendt. De to omvendte regnearter er hhv. *rod* og *logaritme* regnearten, der angivet ved funktionerne rod_n og $\log_n$ netop kan anvendes som de omvendte regnearter til potensregnearten i de to tilfælde:

$$x^n = a \quad \Rightarrow \quad x = \text{rod}_n(a)$$

$$n^x = a \quad \Rightarrow \quad x = \log_n(a)$$

Til eksempel kan man i første tilfælde betragte løsning af en ligning hvor grundtallet er ukendt:

$$x^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x = \text{rod}_2(9) = 3$$

Tilsvarende i det andet tilfælde betragtes løsning af en ligning hvor potenstallet er ukendt:

$$3^x = 9 \quad \Rightarrow \quad x = \log_3(9) = 2$$

Det skal her fremhæves, at den konventionelle notation for rodregnearten ikke er ved brug af funktionen $\text{rod}_n(a)$ men i stedet ved brug af rodsymbolet $\sqrt[n]{a}$. Det er ligeledes konventionen, at hvis der ikke står noget tal for n så der det indforstået at der er tale om kvadratroden dvs. $n = 2$:

$$\sqrt{a} := \sqrt[2]{a}$$