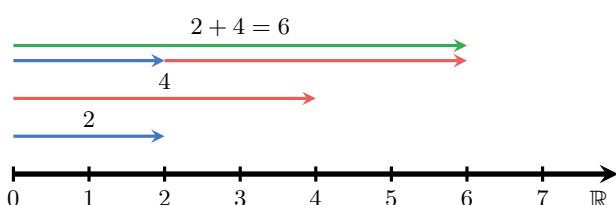
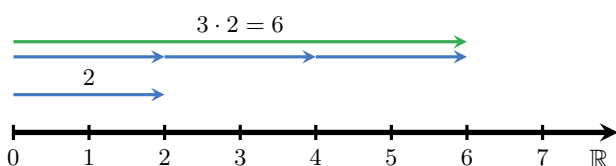


Regnearterne addition og multiplikation

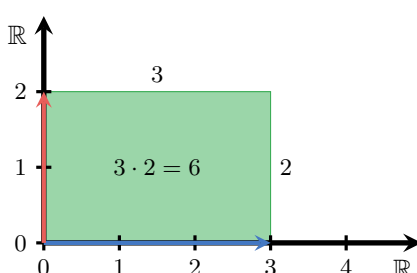
Regnearterne kan fortolkes på lidt forskellige måder. F.eks. givet en talakse kan hvor et tal er repræsenteret af længden fra 0 til tallet, kan summen af to tal betragtes som talenes længder lagt i forlængelse som set på figuren nedenfor. Her ses vektorerne for tallene 2 og 4 der lægges i forlængelse og således udgør en ny vektor på talaksen for tallet 6.



Multiplikation er dog en lidt mere kompliceret regnearter at fortolke hvilket skyldes, at den i virkeligheden repræsenterer flere forskellige regnearter, der når man betragter endimensionelle reelle tal, associeres til samme regnearter. Ved brug af samme endimensionelle talakse kan multiplikation betragtes som en gentagelse eller skallering af en længde som vist på figuren nedenfor. Her ses vektoren for tallet 2 der gentages 3 gange og således udgør en ny vektor på talaksen for tallet 6.



Alternativt kan man anvende to vinkelrette talakser for hhv. de to tal hvorved multiplikation kan fortolkes som arealet af de to længders vinkelrette udspænd. I figuren nedenfor er fortolkningen af multiplikation som det areal der udspændes af to tal illustreret. Her er tallene 2 og 3 afsat på vinkelrette talakser hvoraf arealet af den udspændte firkant således repræsenterer tallet 6. Det skal bemærkes her at tallet 6 ikke kan fortolkes som en ny vektor men som et areal hvilket vil blive belyst senere i emnet *vektorregning*.



Mængden af de reelle talværdier \mathbb{R} udgør sammen med regnearterne *addition* (+) og *multiplikation* (\cdot) en såkaldt *algebraisk struktur*. Dvs. en veldefineret mængde (de reelle talværdier \mathbb{R}) samt nogle regnearter (addition og multiplikation), der kan anvendes til at sammensætte talværdierne.

Denne fundamentale egenskab, at sammensætte talværdier ved brug af regnearter så de repræsenterer andre talværdier, kaldes for *lukning*. Lukning betyder altså, at for to vilkårlige talværdier a og b er summen samt produktet af de to talværdier også en talværdi. Eksempelvis for talværdierne 2 og 3 er summen $2 + 3$ også en talværdi nemlig 5. Tilsvarende for multiplikation er produktet $2 \cdot 3$ også en talværdi nemlig 6.

Ift. at sammensætte talværdier med regnearter bemærkes, at der for en regnearter findes netop en talværdi som udgør en *neutral talværdi*. For regnearter addition er det neutrale tal 0 og for multiplikation er det neutrale tal 1, idet der for alle reelle tal a gælder at:

$$a + 0 = a \quad \text{og} \quad a \cdot 1 = a$$

Den neutrale talværdi for addition, dvs. tallet 0 er ydermere et særligt element ift. multiplikation idet der for alle reelle talværdier a gælder at:

$$a \cdot 0 = 0$$

I tillæg til begrebet om de neutrale talværdier findes begrebet om *Omvendte talværdier*. Omvendte talværdier skal forstås på den måde, at alle talværdier har en omvendt talværdi ift. en given regnearter. For regnearter addition gælder der således, at der for alle talværdier a findes en negativ talværdi $-a$ hvorved der gælder at:

$$a + (-a) = 0$$

På tilsvarende vis for regnearter multiplikation gælder der, at der for alle talværdier a , lige på nær tallet nul $a \neq 0$, findes en reciprok talværdi $\frac{1}{a}$ således at:

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

Grunden til at tallet 0 ekskluderes er nulreglen, der forhindrer tallet 0 i at have en reciprok talværdi. Begrebet om omvendte talværdier for addition og multiplikation er således indbefattet i ligningerne:

$$a + (-a) = 0 \quad \text{og} \quad a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

Foruden ovenstående begreber findes der også nogle fundamentale egenskaber for de forskellige regnearter. Den første egenskab er *kommutativitet* der angiver, at regnearterens resultat er uafhængig af hvilken rækkefølge tallene forekommer ift. regneoperationen. Både addition og multiplikation er kommutative regnearter hvilket for to vilkårlige talværdier a og b kan angives ved:

$$a + b = b + a \quad \text{og} \quad a \cdot b = b \cdot a$$

En anden fundamental egenskab er *distributivitet*, som angiver hvorledes regnearter multiplikation virker på en sum. Her er ydermere tale om at multiplikation både er højredistributiv og venstredistributiv hvilket for tre vilkårlige talværdier a , b og c kan angives ved:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{og} \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Det skal her bemærkes at ligningerne kan læses begge veje således, at hvis et udtryk indeholder flere led hvor der i ledende indgår en fælles faktor kan udtrykket omskrives ved at sætte den fælles faktor uden for en parentes.