Kompendium Grundforløb Matematik

Indhold

Beskrivelse af materialet

I grundforløbet skal du beskæftige dig med funktioner, og vi skal især gå i dybden med lineære funktioner. Dette kompendium indeholder størstedelen af den teori du skal lære. For at teste om du har lært teorien findes et dokument med træningsopgaver (GRUNDFORLØB MATEMATIK TRÆNINGSOPGAVER) og desuden findes et dokument som hjælper dig med at anvende teorien i GeoGebra (GRUNDFORLØB MATEMATIK GEOGEBRA).

Når et nyt begreb introduceres i kompendiet, er det markeret med *kursiv skrift.*
I afslutningen af grundforløbet skal du til en to timers screening i matematik. Spørgsmålene i screeningen vil knytte sig til kapitel 1 til 4 i kompendiet og bagerst i kompendiet finder du en liste med de vigtigste begreber som det forventes at du kender til screeningen.

Matematik kan betragtes som et nyt sprog, du skal lære, og dette materiale giver en indføring og en forklaring af dette sprog, mens anvendelsen især vil komme til udtryk i undervisningen og i samspillet med andre fag.

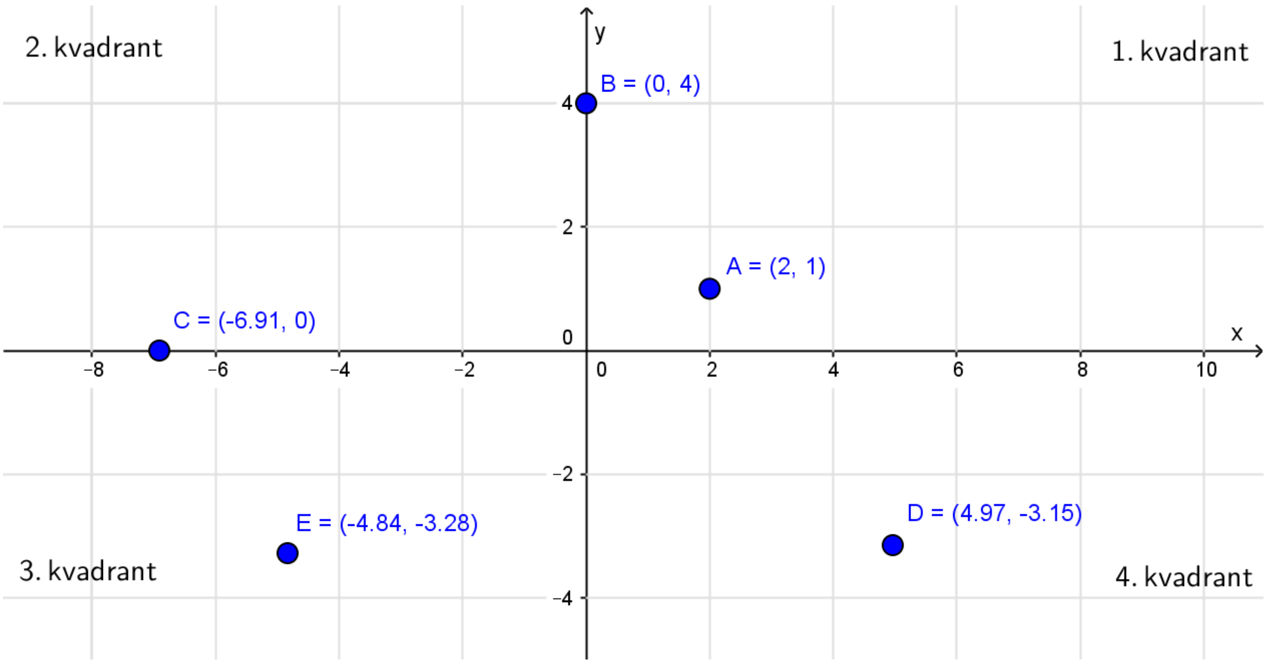
1. Koordinatsystem

Et *koordinatsystem* er indrettet med en vandret akse kaldet x-aksen (1. aksen) som angiver, hvilken værdi x har og en lodret akse kaldet y-aksen (2. aksen) som angiver, hvilken værdi y har. Derudover skærer de to akser hinanden hvor $x = 0$ og $y = 0$. Koordinatsystemet er opdelt i fire områder som kaldes *1., 2., 3.* og *4. kvadrant* som illustreret på Figur 1.

Et *punkt* i et koordinatsystem angiver, at en x-værdi er knyttet til en y-værdi og noteres med en parentes, hvor x-værdien og y-værdien er adskilt af et komma. Dette kaldes punktets *koordinatsæt*. F.eks. har punktet $A = (2,1)$ x-værdien 2 og y-værdien 1. x-værdien kaldes også for punktets *1. koordinat* og y-værdien kaldes for punktets *2. koordinat*.

Hvis x- eller y-værdien er et decimaltal, bruger man semikolon i stedet for komma til adskillelse af koordinaterne, f.eks. $P = (2{,}1; 3)$ hvor 1. koordinaten er 2,1 og 2. koordinaten er 3.

Idet matematikprogrammet GeoGebra, som vi skal arbejde med, bruger punktum i stedet for komma i decimaltal, bruger GeoGebra konsekvent komma til adskillelse af koordinaterne.



Figur 1: Koordinatsystem med forskellige punkter indsat og inddeling i de fire kvadranter.

Bemærk at fortegnene (plus eller minus) på punktets 1. og 2. koordinat angiver, i hvilken kvadrant punktet ligger. Desuden har alle punkter, som ligger på x-aksen en 2. koordinat på 0 og tilsvarende har alle punkter på y-aksen en 1. koordinat på 0.

2. Funktioner

2.1. Repræsentationsformer

En funktion beskriver sammenhængen mellem to variable, som typisk kaldes x og y, hvor der til hver x-værdi højest hører én y-værdi. x kaldes den *uafhængige variabel* og y kaldes den *afhængige variabel*, idet y er bestemt ud fra x. Som udgangspunkt er en funktion givet ved en ligning, hvor y er isoleret, f.eks.

$$y = 2x + 3$$

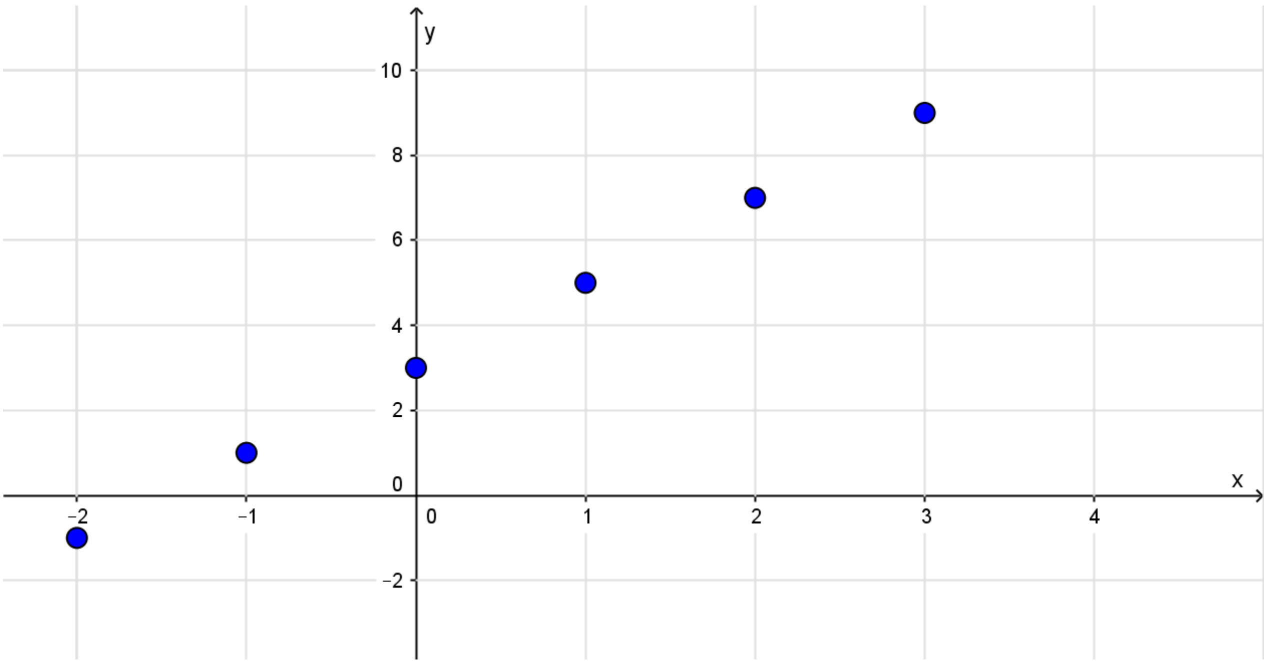
I dette afsnit vil vi se nærmere på, hvordan vi ellers kan repræsentere funktioner, og vi tager udgangspunkt i funktionen givet ved ligningen $y = 2x + 3$ hvor vi begrænser os til at x kun kan være heltal.

En anden måde er i form af en tabel som den nedenfor, der viser sammenhørende værdier af x og y.

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-1	1	3	5	7	9

Her kan det direkte ses hvilken y-værdi, der er knyttet til hvilken x-værdi. Ulempen ved en tabel er, at den kun beskriver en begrænset del af funktionen. I dette tilfælde de hele tal fra $x = -2$ til $x = 3$. Vi kan f.eks. ikke bestemme y-værdien hørende til x = 7.

En tredje måde er i form af en mængde af punkter i et koordinatsystem, se Figur 2. Mængden af alle punkter som hører til en funktion kaldes *grafen* for funktionen (dog siger vi også, at vi har tegnet grafen for funktionen når vi som i Figur 2 kun har tegnet et udsnit af grafen). Fordelen ved grafen er, at den giver et godt overblik over en begrænset del af funktionen. Ulempen er, at x- og y-værdierne kun kan aflæses, og det kan ikke altid gøres nøjagtigt. Man kan kombinere de to første måder ved at angive koordinatsættet til hvert af punkterne i koordinatsystemet.



Figur 2: Grafen for en funktion.

En fjerde måde er i form af en sproglig formulering:

ved $x = -2$ er $y = -1$, dvs. grafen går gennem punktet $(-2, -1)$, og når x stiger med 1 så stiger y med 2.

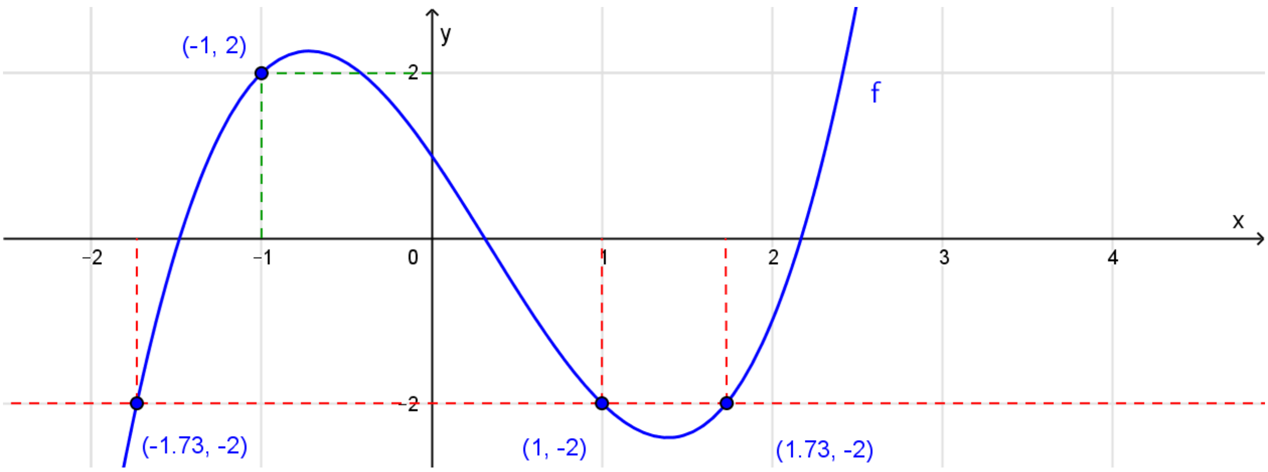
Ofte er vi i den situation at en funktion er repræsenteret ved en tabel eller en sproglig formulering, og for bedre at kunne arbejde videre med funktionen, vil vi gerne tegne grafen for funktionen eller bestemme den ligning som beskriver funktionen.

2.2. Forskriften for en funktion

Funktioner benævnes typisk med f eller g, f.eks. funktionen f givet ved ligningen $y = 2x + 3$. Det er ofte praktisk at have en kort måde at notere udtrykket $2x + 3$, og vi indfører derfor $f(x) = 2x + 3$, som kaldes forskriften for f. Dermed har vi at $y = f(x)$, og typisk vil vi nøjes med at beskrive funktionen ved $f(x) = 2x + 3$ og lade $y = f(x)$ være underforstået.
Denne notation har den fordel, at y-værdien hørende til f.eks. $x = 1$ kan skrives kort som $f(1)$ og i den forbindelse kaldes y-værdien for den tilhørende funktionsværdi. Med $f(x) = 2x + 3$ bliver det $f(1) = 2 \cdot 1 + 3$ som kan reduceres til $f(1) = 5$. Desuden kan vi kort skrive alle x-værdierne hvor f.eks. $y = 9$ som $f(x) = 9$. Med $f(x) = 2x + 3$ bliver det ligningen $2x + 3 = 9$, som har løsningen $x = 3$ (vi ser nærmere på ligninger i afsnit 2.4).
Bemærk at $f(x) = 9$ kan forstås på to måder: det kan både være forskriften for en funktion, hvor funktionsværdien er 9 uafhængigt af hvilken værdi x har, og det kan være en ligning, som giver alle de x-værdier, hvor funktionsværdien er 9. Det vil fremgå af sammenhængen, hvordan $f(x) = 9$ skal forstås.

2.3. Grafen for en funktion

I den funktion vi så på ovenfor i afsnit 2.1, var x kun heltal. Vi vil her se på grafen for en funktion f, hvor x kan være alle tal og forklare, hvordan grafen kan bruges til at få informationer om f. På Figur 3 ses grafen for f. Idet grafen består af uendelig mange punkter, tegner man kun en kurve som illustrerer, hvor punkter skulle tegnes. Det antages, at grafen forsætter videre uden for det valgte vindue.
Det første vi vil se på er, hvordan man bestemmer funktionsværdien hørende til en bestemt x-værdi, f.eks. $f(-1)$. Dvs. vi skal bestemme det punkt på grafen, hvor $x = -1$. Vi aflæser det til $(-1, 2)$ og dermed er $f(-1) = 2$. Funktionsværdien $f(0)$ har en speciel betydning, idet vi her har 2. koordinaten til det punkt, hvor $x = 0$. Dette punkt ligger på y-aksen og dermed er $f(0)$ 2. koordinaten til det punkt, hvor grafen skærer y-aksen. Skæringspunktet ligger ved ca. $y = 1$ på Figur 3 og dermed er $f(0) = 1$.
Det andet vi vil se på er, hvordan man bestemmer de x-værdier, som giver en bestemt funktionsværdi, f.eks. $f(x) = -2$. Dvs. vi skal bestemme de punkter på grafen, hvor 2. koordinaten er -2. Vi aflæser dem til $(-1{,}73; -2)$, $(1; -2)$ og $(1{,}73; -2)$, og dermed har ligningen $f(x) = -2$ løsningerne $x = -1{,}73$, $x = 1$ og $x = 1{,}73$.

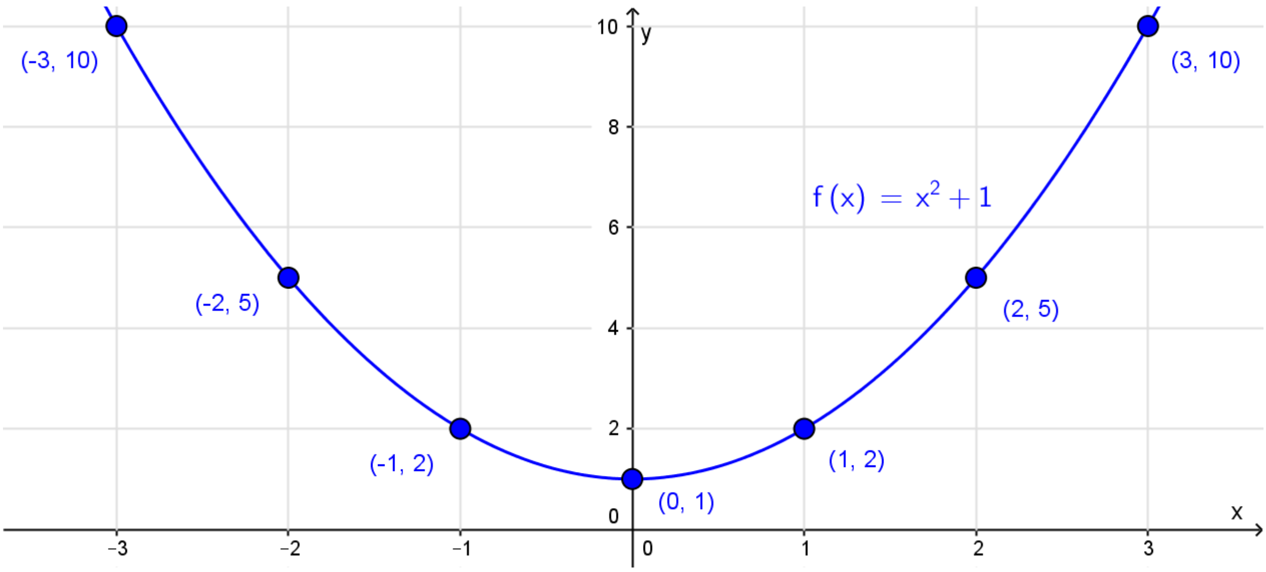


Figur 3: Bestemmelse af $f(-1)$ samt løsning af $f(x) = -2$.

Bemærk at de værdier, vi bestemmer her, er behæftet med en vis usikkerhed som afhænger af vores evne til at aflæse på grafen.
Er man i den situation, hvor man har en forskrift og gerne vil tegne grafen for funktionen, kan man med fordel starte med at lave en tabel (sildeben) ud fra forskriften. Hvis vi f.eks. har forskriften $f(x) = x^2 + 1$ kan vi lave tabellen nedenfor ved at udregne funktionsværdien til de valgte x-værdier (f.eks. giver $x = 2$ funktionsværdien $f(2) = 2^2 + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$, som er fremhævet i tabellen).

x	-3	-2	-1	0	1	$\mathbf{2}$	3
$f(x)$	10	5	2	1	2	$\mathbf{5}$	10

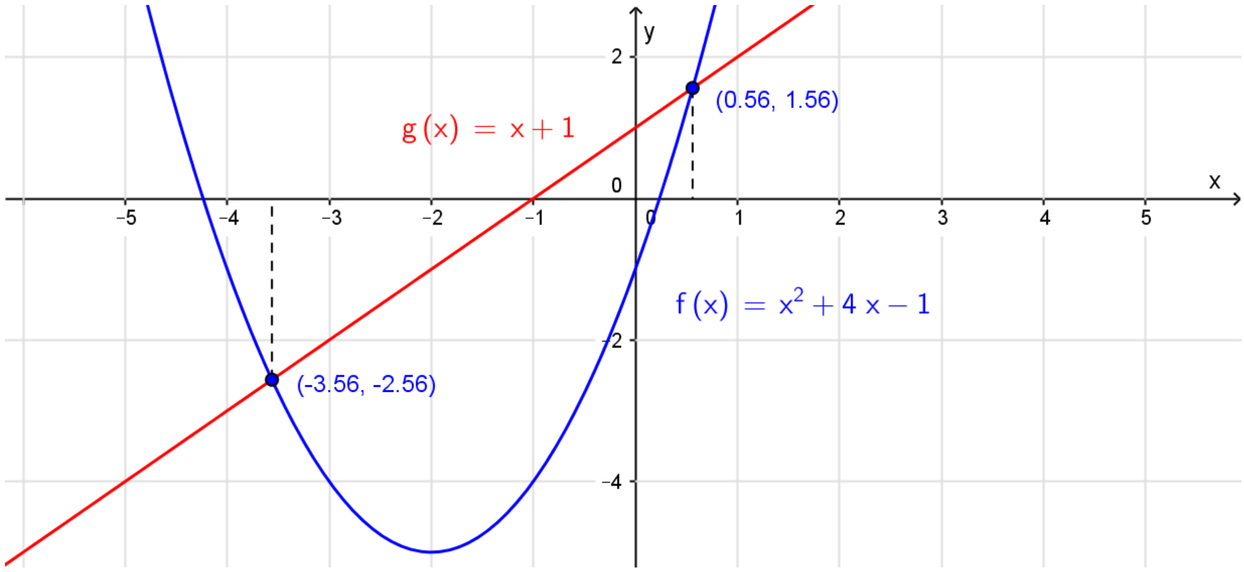
Derefter tegnes disse punkter ind i et koordinatsystem og forbindes med en kurve, se Figur 4.



Figur 4: Skitse af grafen for en funktion.

2.4. Funktioner og ligninger

En vigtig del i matematik er løsning af *ligninger* – altså at finde ud af hvornår to udtryk er lig med hinanden. Ligninger kan formuleres på flere forskellige måder. Fra folkeskolen kender du sikkert at skulle løse ligningen $2x + 4 = x - 5$, hvor det gælder om at finde den x-værdi, som gør, at resultatet på begge sider giver det samme.
En anden måde, at løse ligninger på, er grafisk, hvor det gælder om at bestemme skæringspunkterne mellem to funktioner. Når vi skal bestemme skæringspunkterne mellem to funktioner f og g, så skal vi finde de x-værdier, hvor funktionsværdierne er lig med hinanden – altså $f(x) = g(x)$. Og det er jo en ligning.
En sådan ligning kan vi løse grafisk ved at aflæse skæringspunkterne mellem de to funktioner, og på Figur 5 er f.eks. de to skæringspunkter mellem $f(x) = x^2 + 4x - 1$ og $g(x) = x + 1$ bestemt grafisk.



Figur 5: Bestemmelse af skæringspunkterne mellem to funktioner.

Når løsningerne af en ligning skal opskrives, er det altid kun x-værdierne, som skal angives. Løsningerne til $f(x) = g(x)$ i ovenstående eksempel er altså $x = -3{,}56$ og $x = 0{,}56$.

Ovenfor har vi angivet ligningen som $f(x) = g(x)$, men vi kunne lige så godt have indsat de enkelte forskrifter for de to funktioner, og så vil ligningen hedde $x^2 + 4x - 1 = x + 1$. Så en hvilken som helst ligning kan altid opfattes som bestemmelse af skæringspunkterne mellem funktionen til venstre for lighedstegnet og funktionen til højre for lighedstegnet.
Den umiddelbare fordel ved grafisk løsning af ligninger er, at vi som udgangspunkt kan løse alle ligninger. F.eks. er ovenstående ligning ret svær at løse i hånden. En ulempe ved denne metode er, at vi ikke kan være sikker på, at vi har bestemt alle løsningerne. F.eks. kunne der til ligningen ovenfor være en løsning mere, som lå uden for det valgte interval på Figur 5. Vi har dog en anden metode til at løse ligninger, som sikrer, at vi får bestemt alle løsningerne.

Fra folkeskolen ved du, at når vi skal løse ligninger i hånden, så handler det om at få isoleret x, dvs. omforme ligningen, så man ender med $x = \cdots$
Samtidig ved du også, at der er en række regler, som skal overholdes, når x skal isoleres.
Hovedreglen er, at man ALTID skal gøre det samme på begge sider af lighedstegnet.

De vigtigste regler er:

- Man må lægge det samme til på begge sider af lighedstegnet
- Man må trække det samme fra på begge sider af lighedstegnet
- Man må gange med det samme (dog ikke 0) på begge sider af lighedstegnet
- Man må dividere med det samme (dog ikke 0) på begge sider af lighedstegnet.

Derudover er der nogle principper i rækkefølgen på de enkelte udregninger, som gør det lettere at få isoleret variablen x:

- Udregn først eventuelle parenteser vha. regnereglen: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.
- Saml alle led med x på den ene side (nemmest at vælge den side, hvor der er flest x'er)
- Flyt led kun bestående af tal til modsatte side
- Isolér x ved typisk at dividere med tallet foran x på begge sider af lighedstegnet.

Derudover bør man altid mellem hver operation forkorte på hver side, når det er muligt.

Et eksempel på løsning af en sådan ligning kunne være $2 \cdot (2x - 1) = x + 5$.

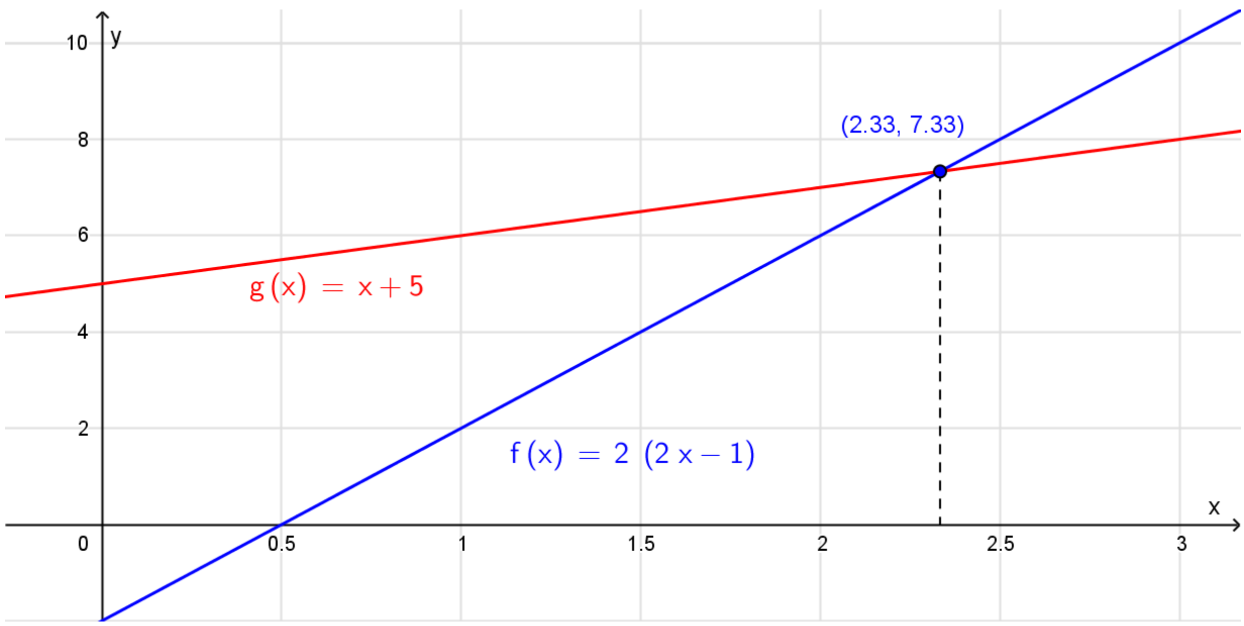
Ligningen løses typisk på følgende måde:

$2 \cdot (2x - 1) = x + 5$	Gang ind i parentesen
$2 \cdot 2x + 2 \cdot (-1) = x + 5$	Forkort
$4x - 2 = x + 5$	Træk x fra på begge sider (så forsvinder x fra højre side)
$4x - 2 - x = x + 5 - x$	Forkort
$3x - 2 = 5$	Læg 2 til på begge sider (så forsvinder 2 fra venstre side)
$3x - 2 + 2 = 5 + 2$	Forkort
$3x = 7$	Divider med 3 på begge sider (så forsvinder 3-tallet foran x)
$\frac{3x}{3} = \frac{7}{3}$	Forkort
$x = \frac{7}{3}$	

Løsningen til ligningen bliver dermed $\frac{7}{3}$, og dette er den eneste løsning. Hvis ligningen ovenfor bruges til at beskrive virkeligheden, f.eks. hvor mange kr. en genstand koster, så vil vi ikke skrive at genstanden koster $\frac{7}{3}$ kr. I stedet afrunder vi løsningen til et passende antal decimaler: genstanden koster 2,33 kr.

Vi skelner således mellem den eksakte (præcise) løsning og en afrundet (tilnærmet) løsning. I teoretiske matematikopgaver foretrækkes oftest den eksakte løsning, mens vi i opgaver med praktisk indhold vil angive den afrundede løsning med et passende antal decimaler afhængig af opgavens indhold.

Tegner vi graferne af de to funktioner $f(x) = 2 \cdot (3x - 1)$ (venstre side af ligningen) og $g(x) = x + 5$ (højre side af ligningen), kan vi også hurtigt bestemme løsningen grafisk, se Figur 6.



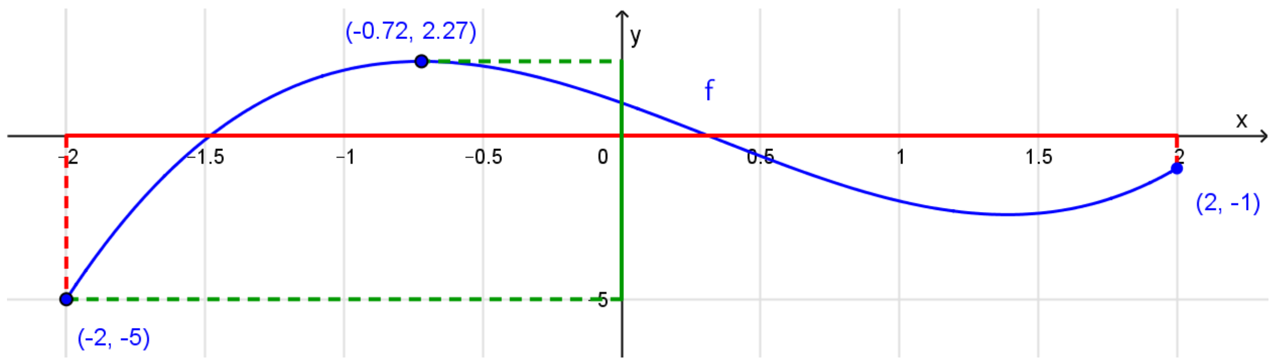
Figur 6: Grafisk løsning af ligningen $2 \cdot (2x - 1) = x + 5$.

Bemærk at en anden ulempe ved den grafiske løsning er, at den ikke giver den eksakte løsning, men kun en tilnærmelse.

3. Egenskaber ved funktioner

3.1. Definitions- og værdimængden for en funktion

Definitionsmængden er de x-værdier, som kan anvendes i funktionen og oplyses typisk efter forskriften. Hvis definitionsmængden f.eks. er alle tallene mellem 1 og 5, angiver vi det således: $1 \leq x \leq 5$. Bemærk at der under ulighedstegnene er en streg. Det betyder, at endepunkterne 1 og 5 er med i intervallet. Hvis vi i stedet har x-værdierne fra og med 1 og helt hen til 5, men x-værdien 5 ikke er med, så skriver vi $1 \leq x < 5$. Hvis der kun står et ulighedstegn, så betyder det altså, at endepunktet ikke er med. Hvis vi har x-værdierne fra og med 2, men ikke nogen øvre grænse, angiver vi definitionsmængden således: $x \geq 2$.
Hvis grafen for funktionen går helt ud til kanten af koordinatsystemet, illustrerer det at definitions-mængden ikke har nogen grænser og består af alle tal. Hvis grafen derimod stopper før kanten, som det er tilfældet i Figur 7, så har funktionen en begrænset definitionsmængde som vi kan aflæse ud fra de x-værdier grafen spænder over. Vi kan umiddelbart aflæse at funktionen i Figur 7 har definitionsmængden givet ved $-2 \leq x \leq 2$. Det vil normalt fremgå i beskrivelsen af figuren hvis endepunkterne ikke er med i definitionsmængden.

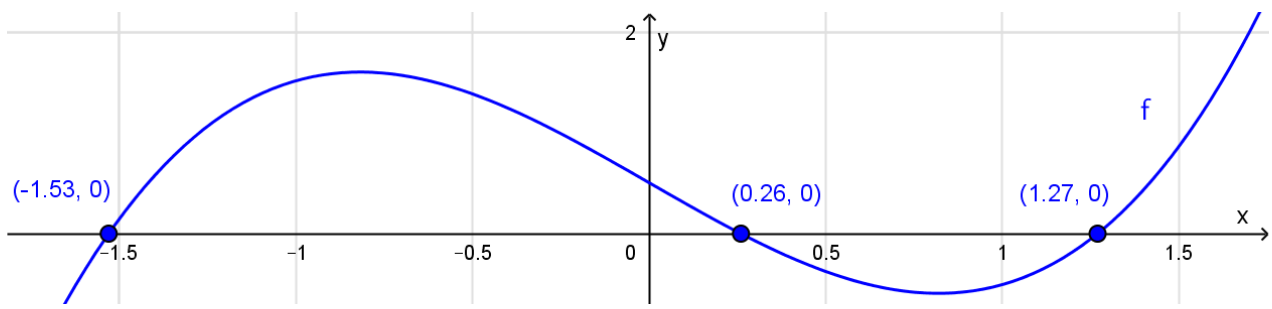


Figur 7: Bestemmelse af definitions- og værdimængden for en funktion.

Værdimængden er de funktionsværdier (y-værdier), som funktionen strækker sig over. Typisk angives værdimængden ikke i forbindelse med forskriften, men har man f.eks. bestemt værdimængden til at være alle positive tal, så angiver vi den således: $y \geq 0$.
Vi kan aflæse at funktionen f i Figur 7 har værdimængden $-5 \leq y \leq 2{,}27$.
Bemærk at der kan godt være "huller" i definitions- eller værdimængden således, at de kommer til at bestå af flere intervaller.

3.2. En funktions rødder

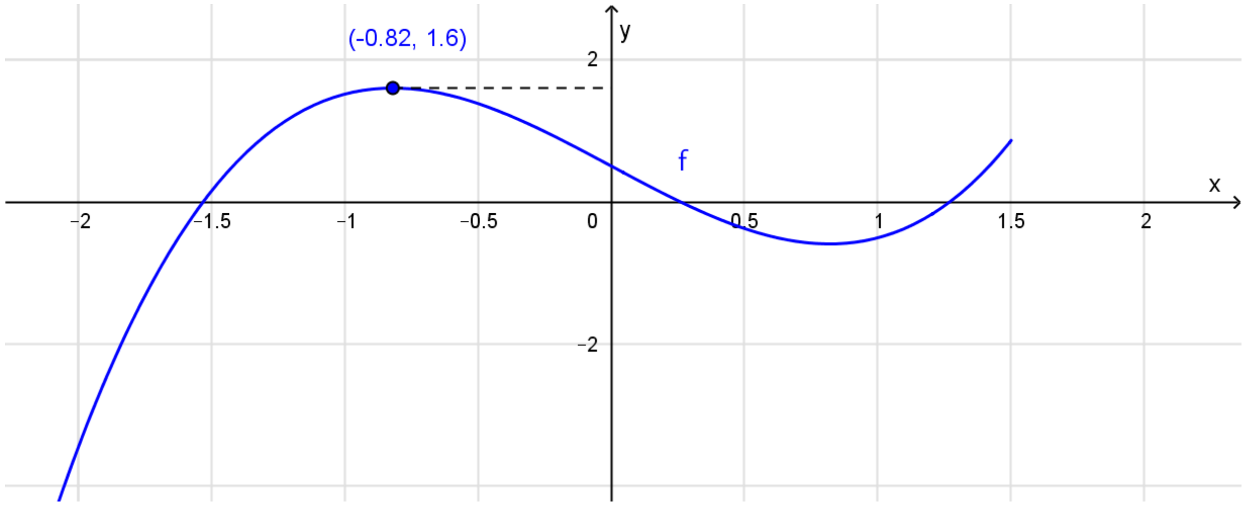
En *rod* for en funktion f (også kaldet nulpunkt) er en x-værdi, hvor funktionsværdien er 0. Ved hjælp af forskriften kan rødderne bestemmes som løsningerne til ligningen $f(x) = 0$. På grafen for funktionen kan rødderne bestemmes ved at aflæse de x-værdier, hvor grafen skærer x-aksen, idet funktionsværdien i disse punkter er 0. Vi kan aflæse, at funktionen f i Figur 8 har rødderne $x = -1{,}53$, $x = 0{,}26$ og $x = 1{,}27$.



Figur 8: Bestemmelse af rødderne for en funktion.

3.3. Maksimum og minimum for en funktion

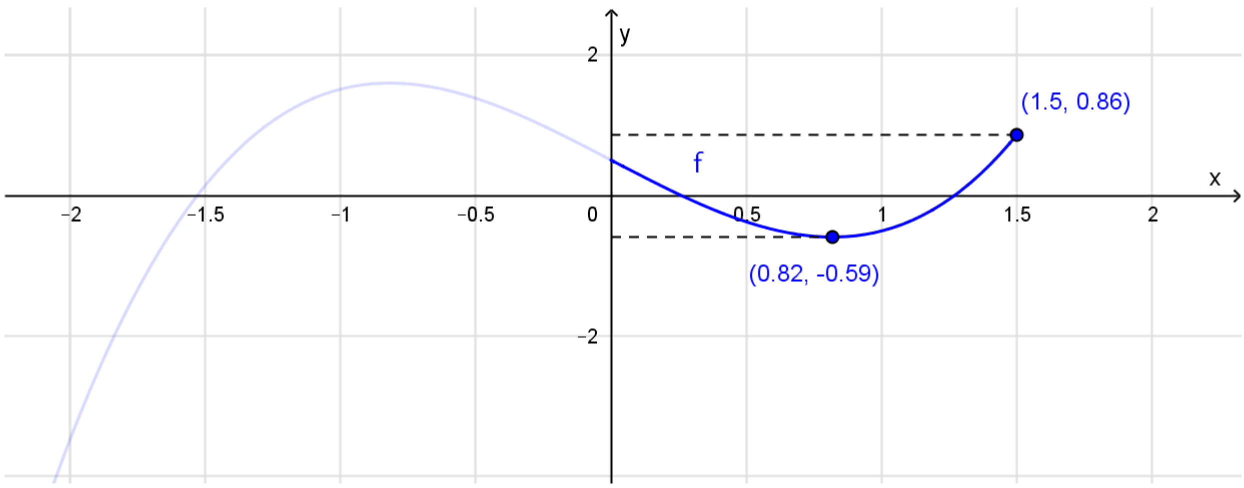
Maksimum for en funktion er den største funktionsværdi (y-værdi), som funktionen antager. Hvis vi kender værdimængden, kan maksimum nemt bestemmes, idet maksimum er den største værdi i værdimængden. Hvis værdimængden ikke har en største værdi eller endepunktet ikke er med i værdimængden, så kan man risikere, at funktionen ikke har noget maksimum, idet der ikke kan angives en største værdi.
Vi kan aflæse, at funktionen f i Figur 9 har et maksimum på $1{,}6$ i punktet $(-0{,}82; 1{,}6)$.



Figur 9: Bestemmelse af maksimum for en funktion.

På samme måde som med maksimum kan man også tale om *minimum* for en funktion. Metoden er den samme som beskrevet ovenfor, hvor minimum blot er den mindste funktionsværdi.
Vi kan umiddelbart aflæse, at funktionen f i Figur 9 ikke har noget minimum idet grafen går ud til kanten af koordinatsystemet og vi antager at grafen fortsætter på samme måde.

Ser vi kun på den del af funktionen f ovenfor hvor f.eks. $0 \leq x \leq 1{,}5$, så kan vi aflæse, at f har et maksimum på $0{,}86$ i punktet $(1{,}5; 0{,}86)$, se Figur 10. Dette kaldes et *lokalt maksimum*. Tilsvarende kan vi aflæse at f har et *lokalt minimum* på $-0{,}59$ i punktet $(0{,}82; -0{,}59)$. Generelt siger man, at f har et lokalt maksimum eller minimum, hvis dette maksimum eller minimum gælder, når vi ser på et interval i definitionsmængden og stadig gælder, når vi udvider intervallet en lille smule.



Figur 10: Bestemmelse af lokalt maksimum og minimum for funktionen f

Bemærk at flertalsformerne af maksimum og minimum er lidt specielle: *maksima* og *minima*. Desuden har vi også en fællesbetegnelse for maksimum og minimum: *ekstremum*, og flertalsformen er *ekstrema*. F.eks. har funktionen f tre lokale ekstrema som findes i punkterne $(-0{,}82; 1{,}6)$, $(0{,}82; -0{,}59)$ og $(1{,}5; 0{,}86)$.

3.4. En funktions monotoniforhold

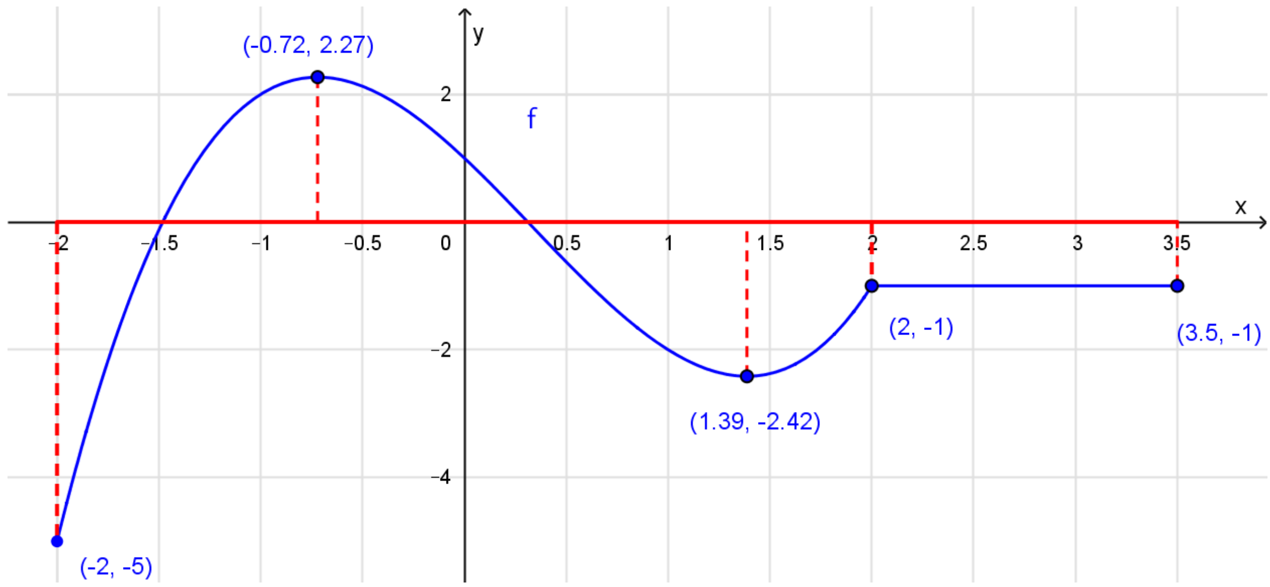
Når en funktions *monotoniforhold* skal bestemmes, angives det, i hvilke intervaller af x-værdier funktionen er voksende, aftagende og konstant.

En funktion er *voksende* i et interval, hvis $f(x)$ stiger, når x stiger.

En funktion er *aftagende* i et interval, hvis $f(x)$ falder, når x stiger.

En funktion er *konstant* i et interval, hvis $f(x)$ ikke ændres, når x stiger.

For at kunne angive disse intervaller skal vi kende definitionsmængden, så man ved hvilke x-værdier, der skal inddeles i intervaller. Derudover kan vi med fordel bestemme de x-værdier, hvor funktionen har lokale maksima og minima, idet funktionen her kan skifte mellem at være voksende og aftagende.
En funktion kan dog også skifte mellem at være voksende og aftagende ved andre x-værdier, hvis definitionsmængden består af flere intervaller.
Vi kan aflæse at funktionen f i Figur 11 er voksende for $-2 \leq x \leq -0{,}72$, aftagende for $-0{,}72 \leq x \leq 1{,}39$, voksende for $1{,}39 \leq x \leq 2$ og konstant for $2 \leq x \leq 3{,}5$.



Figur 11: Bestemmelse af monotoniforhold for en funktion.

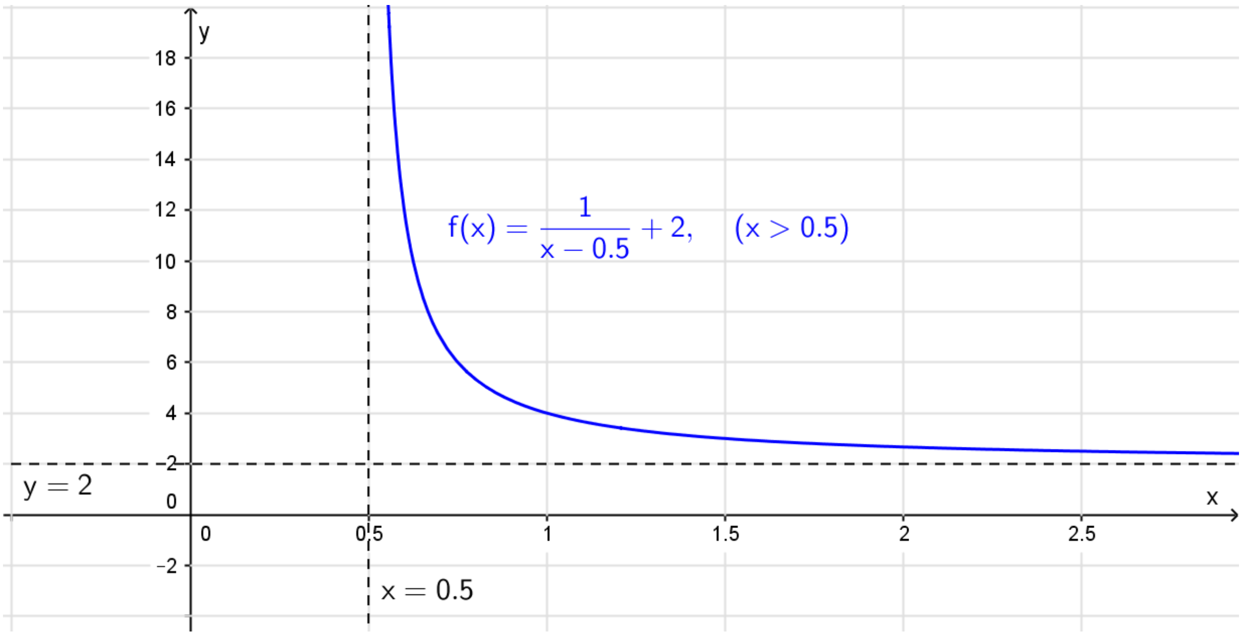
Bemærk at i de punkter hvor funktionen skifter mellem at være voksende og aftagende, medtages x-værdien i både det voksende og aftagende interval.
Hvis funktionen er voksende eller aftagende på hele definitionsmængden, kaldes funktionen *monoton*.

3.5. Asymptote

På Figur 12 ses funktionen $f(x) = \frac{1}{x-0{,}5} + 2$, hvor definitionsmængden er givet ved $x > 0{,}5$. Vi kan se, at grafen nærmer sig den vandrette linje givet ved $y = 2$, når x stiger. Dette kan vi også illustrere med tabellen nedenfor, hvor det ses, at $f(x)$ nærmer sig 2, når x bliver større og større.

x	1	10	100	1000
$f(x)$	4	2,105	2,010	2,001

Denne egenskab kalder man, at f har en *vandret asymptote* i $y = 2$. Bemærk at $f(x)$ ikke nødvendigvis bliver præcis 2, men kun kommer tættere og tættere på tallet, jo større x bliver.
Generelt siger man, at f har en vandret asymptote i $y = k$ hvis $f(x)$ nærmer sig k, når x går mod uendelig (∞) eller minus uendelig ($-\infty$).



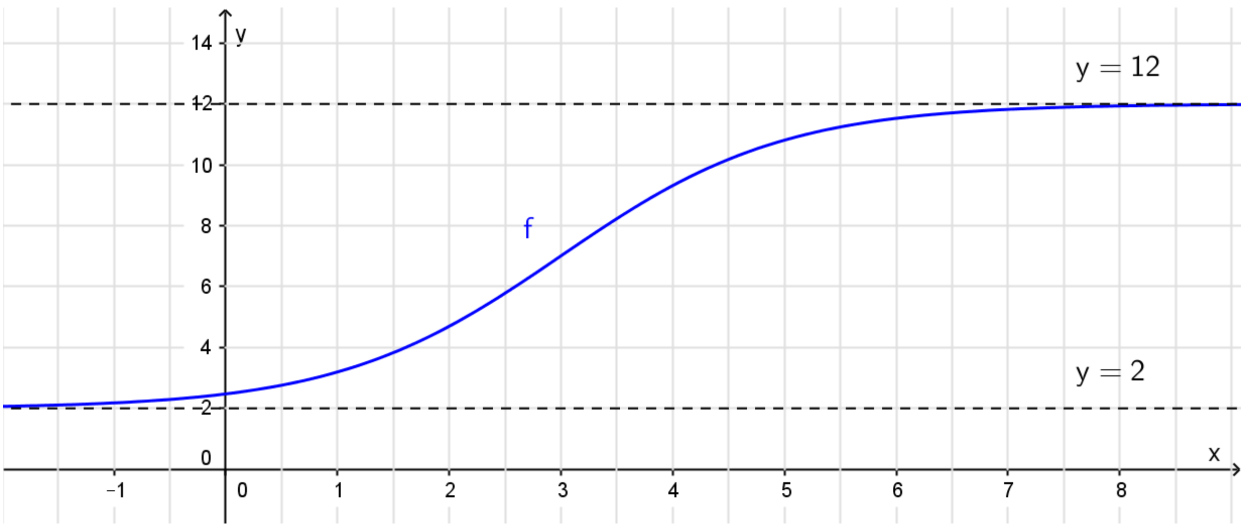
Figur 12: En funktion med en vandret og lodret asymptote.

Funktionen f på Figur 12 har også en anden egenskab. Det ses, at grafen nærmer sig den lodrette linje givet ved $x = 0{,}5$, når x-værdierne nærmer sig 0,5. Dette kan vi også illustrere med tabellen nedenfor, hvor det ses, at jo tættere x kommer på 0,5 (husk *x* skal være større end 0,5), jo større bliver $f(x)$.

x	1	0,6	0,51	0,501
$f(x)$	4	12	102	1002

Bemærk at grafen ikke skærer $x = 0{,}5$, men nærmer sig linjen. Generelt siger man, at f har en *lodret asymptote* i $x = k$, hvis $f(x)$ går mod uendelig eller minus uendelig, når x nærmer sig k.

På Figur 13 ses en funktion f som har vandrette asymptoter i både $y = 2$ og $y = 12$.



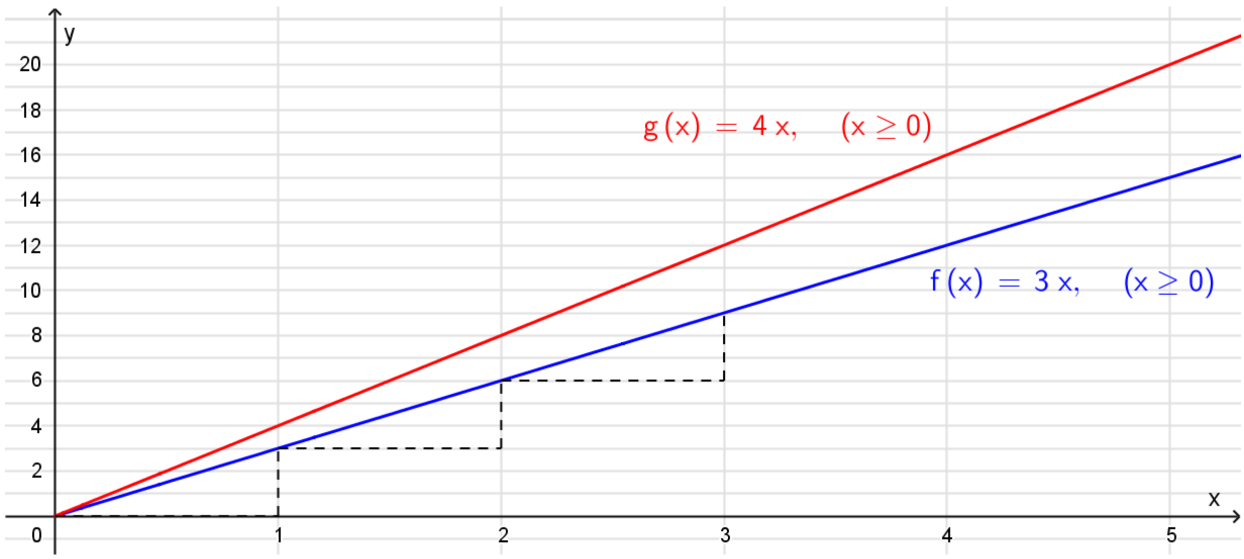
Figur 13: En funktion f med to vandrette asymptoter.

4. Lineære funktioner

Indtil videre har vi arbejdet med konkrete funktioner som f.eks. $f(x) = 5x + 10$ eller $g(x) = 3x - 6$ enkeltvis. Her vil vi gruppere dem sammen med en række andre funktioner som deler en række egenskaber med f og g og undersøge disse egenskaber. f og g tilhører den funktionstype, vi kalder lineære funktioner og alle disse funktioner har forskriften $f(x) = a \cdot x + b$, hvor a og b er konstanter. At for eksempel f tilhører denne funktionstype kan vi se ved at indsætte $a = 5$ og $b = 10$ i forskriften. Da a og b entydigt bestemmer forskriften, så bestemmer de også, hvilke egenskaber funktionen har. Dermed bliver vores opgave at undersøge, hvordan egenskaberne ved lineære funktioner afhænger af a og b. Vi starter dog med en lidt simplere funktionstype som kaldes proportionale funktioner.

4.1. Proportionale funktioner

Forskriften for en *proportional funktion* er givet ved $f(x) = a \cdot x$, hvor x er den uafhængige variabel og a er en konstant. Vi vil her begrænse os til de situationer, hvor a er en positiv konstant, dvs. $a > 0$. To eksempler på proportionale funktioner er dermed $f(x) = 3x$ og $g(x) = 4x$. Derudover vil vi begrænse definitionsmængden til at være givet ved $x \geq 0$. Vi benytter disse begrænsninger, da de typisk gør sig gældende, når vi bruger proportionale funktioner til at beskrive virkeligheden.
En af konsekvenserne er, at værdimængden for en proportional funktion er givet ved $y \geq 0$, og dette følger af at produktet (gange) af to positive tal a og x giver et positivt tal.
På Figur 14 ses graferne for f og g. Det ses, at både f og g er voksende funktioner. Generelt er proportionale funktioner voksende på hele deres definitionsmængde når $a > 0$ (bevis i Appendiks 1).



Figur 14: Graferne for to proportionale funktioner.

For at undersøge proportionale funktioner nærmere ser vi på en tabel for funktionen $f(x) = 3x$.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	3	6	9	12	15

Idet vi kan se, at grafen går gennem punktet (0,0) har vi, at skæringen med y-aksen er ved $y = 0$. Vi kan bevise (argumentere for), at dette gælder generelt for en proportional funktion $f(x) = a \cdot x$, idet vi indsætter $x = 0$ i forskriften:

$$f(0) = a \cdot 0 = 0$$

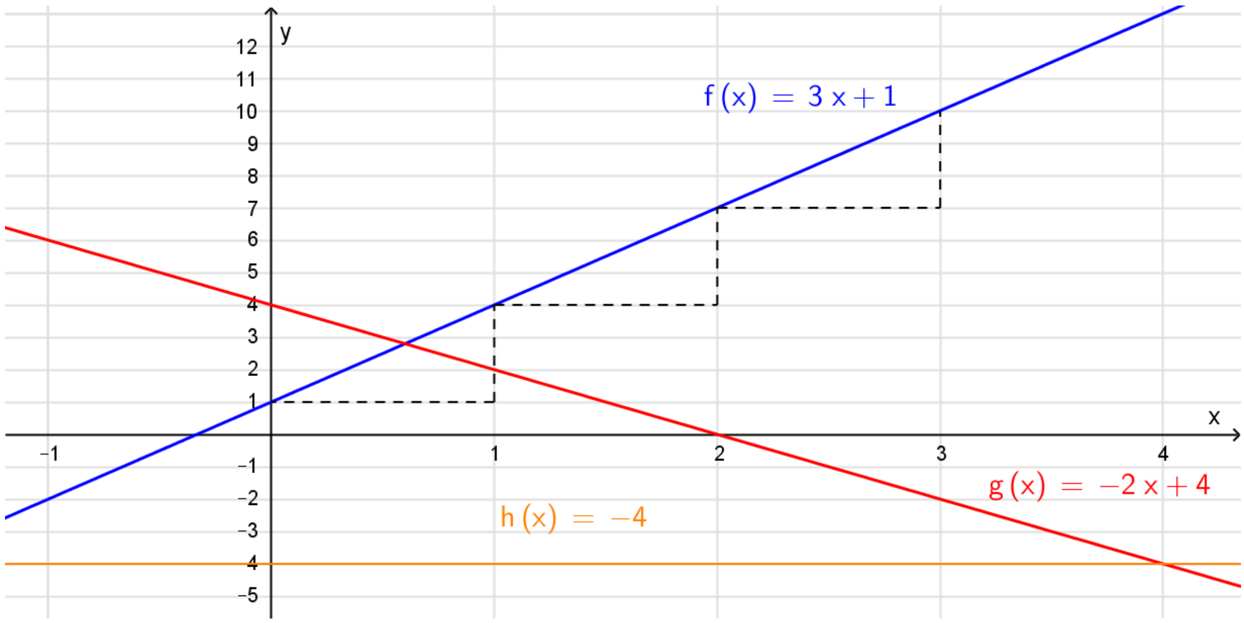
Dermed har vi, at grafen for proportionale funktioner altid går gennem punktet (0,0), og derved skærer den y-aksen i $y = 0$. Dette medfører også, at funktionen har en rod i $x = 0$.

Hvis vi går tilbage til funktionen $f(x) = 3x$, kan vi ud fra tabellen se, at når x stiger med 1, så stiger funktionsværdien $f(x)$ med 3. Dette er også illustreret i Figur 14. Generelt har vi, at funktionsværdien for en proportional funktion $f(x) = a \cdot x$ stiger med a, når x stiger med 1 (bevis i Appendiks 2). Af denne grund kaldes a for *hældningskoefficienten*, idet den afgør, hvor stor hældning der er på grafen. Man kan også vise at grafen for en proportional funktion er en ret linje, men det gemmer vi til efter grundforløbet.

I naturvidenskab bruger vi typisk en anden egenskab ved proportionale funktioner til at argumentere for, at sammenhængen mellem x og y er proportional: $y = a \cdot x$. Hvis vi ser på tabellen for $f(x) = 3x$ som giver os sammenhængen $y = 3x$, så ser vi at når x fordobles, så fordobles y ligeledes. Denne egenskab gælder generelt for alle proportionale funktioner (bevis i Appendiks 3), og skyldes at den eneste forskel på x og y er, at y er en faktor a større end x. F.eks. kan vi i tabellen for $f(x) = 3x$ se at y-værdierne er en faktor 3 større end x-værdierne. Af denne grund kaldes a også for *proportionalitetsfaktoren*.

4.2. Lineære funktioner

Forskriften for en *lineær funktion* er givet ved $f(x) = a \cdot x + b$, hvor x er den uafhængige variabel, mens a og b er konstanter. Vi lægger ikke nogen begrænsninger på a og b, dvs. de kan både være positive, negative og nul. Dermed er både $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = -2x + 4$ og $h(x) = -4$ eksempler på lineære funktioner. Vi begrænser heller ikke definitionsmængden, idet der kan forekomme situationer hvor x både skal være positiv og negativ, når vi bruger lineære funktioner til at beskrive virkeligheden. I virkelighedsnære opgaver kan der dog godt forekomme begrænsning af definitionsmængden.
På Figur 15 ses graferne for ovenstående tre funktioner f, g og h.



Figur 15: Graferne for tre lineære funktioner med forskellige monotoniforhold.

Det ses, at f er voksende, g er aftagende, og h er konstant. Generelt er det fortegnet på a, som afgør monotoniforholdene for en lineær funktion (bevis i Appendiks 4):

$a < 0$: aftagende
$a = 0$: konstant
$a > 0$: voksende.

Hvis vi f.eks. ser på $f(x) = 3x + 1$, så er $a = 3$ og dermed positiv, hvilket medfører, at funktionen f er voksende på hele dens definitionsmængde. Dette passer overens med, hvad vi observerede i Figur 15.
For at undersøge den lineære funktion nærmere ser vi på en tabel for f.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-5	-2	1	4	7	10

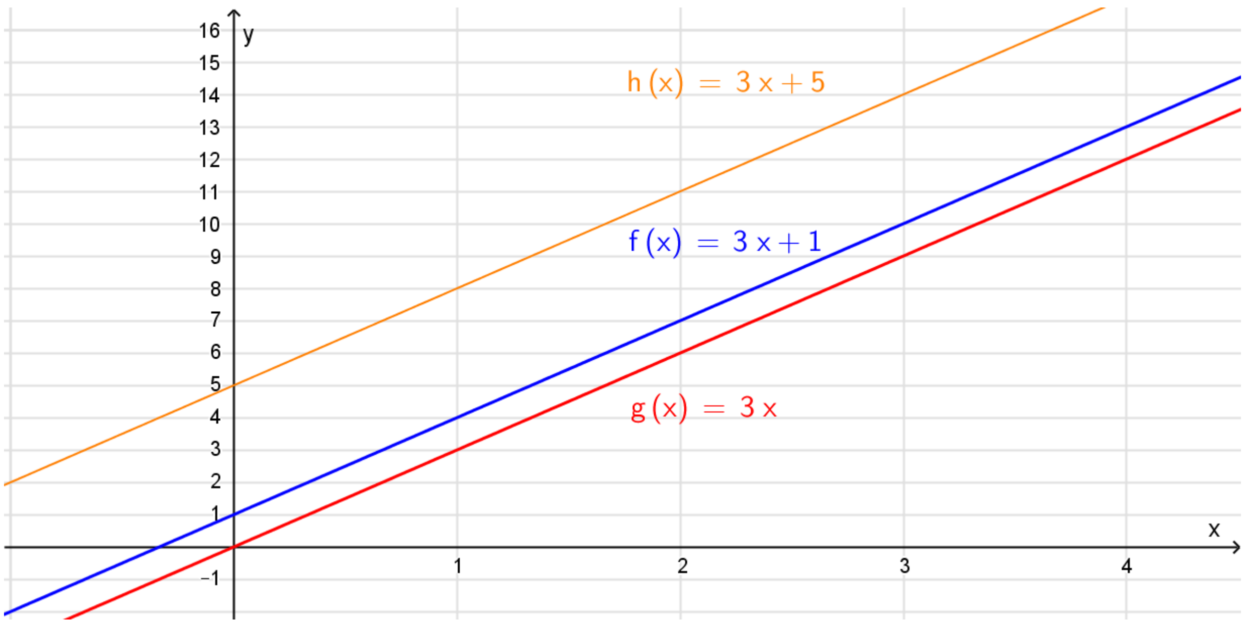
Idet vi kan se, at da grafen går gennem punktet $(0,1)$, har vi at skæringen med y-aksen er ved $y = 1$. Generelt vil grafen for en lineær funktion $f(x) = a \cdot x + b$ skære y-aksen i $y = b$, og dette kan vi bevise ved at indsætte $x = 0$ i forskriften:

$$f(0) = a \cdot 0 + b = b.$$

Dermed går grafen gennem punktet $(0, b)$ og skærer altså y-aksen i $y = b$.

Hvis vi går tilbage til funktionen $f(x) = 3x + 1$, så kan vi ud fra tabellen konstatere, at når x stiger med 1, så stiger funktionsværdien med 3. Dette er også illustreret i Figur 15. Generelt gælder at funktionsværdien for en lineær funktion $f(x) = a \cdot x + b$ stiger med a, når x stiger med 1 (bevis i Appendiks 5). Af denne grund kaldes a for hældningskoefficienten ligesom ved den proportionale funktion.

Hvis vi sammenligner forskrifterne for en proportional funktion $f(x) = a \cdot x$ og en lineær funktion $f(x) = a \cdot x + b$, så er den eneste forskel, at der er lagt b til ved den lineære funktion. Dermed er funktionsværdierne for den lineære funktion b større end funktionsværdierne for den proportionale funktion, hvis de to funktioner har samme a-værdi. Hvis vi f.eks. sammenligner de to tabeller for $f(x) = 3x$ og $f(x) = 3x + 1$, så er alle funktionsværdier 1 større ved den lineære funktion. Derfor kaldes b for *konstantleddet* idet den udgør den konstante forskel på funktionsværdierne.
Bemærk desuden at grafen for den lineære funktion fremkommer ved at flytte grafen for den proportionale funktion b op i koordinatsystemet, se evt. Figur 16. Dette medfører også at grafen for en lineær funktion er en ret linje ligesom det er ved en proportional funktion.



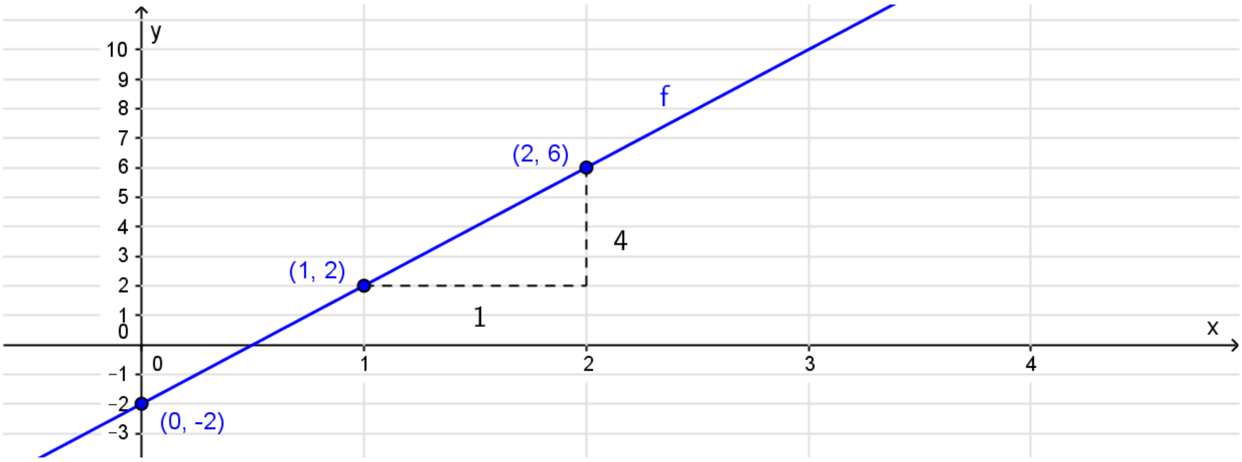
Figur 16: Graferne for tre lineære funktioner som er parallelle.

Idet graferne for lineære funktioner er rette linjer, har vi et begreb fra geometri, som vi kan bruge til at sammenligne linjer. Hvis graferne for to lineære funktioner f og g konstant har samme lodrette afstand mellem sig, kaldes de *parallelle*. Dette sker når f og g har samme hældningskoefficent (overvej selv hvordan man beviser dette). Et eksempel kan ses på Figur 16.

4.3. Bestemmelse af forskriften for en lineære funktion

Forskriften for en lineær funktion $f(x) = a \cdot x + b$ kan aflæses ud fra grafen eller beregnes ud fra to punkter, som grafen går gennem. I begge situationer gælder det om at bestemme a og b, som jo fastlægger forskriften.

Vi vil først se på, hvordan man aflæser forskriften ud fra grafen. På Figur 17 ses grafen for den lineære funktion f. Vi har fra tidligere, at når x stiger med 1, så stiger/falder funktionsværdien med a. Dermed kan vi bestemme hældningskoefficienten a ved at vælge et vilkårligt punkt på grafen, gå 1 til højre og aflæse hvor meget vi skal gå op eller ned for at ramme grafen igen. Dette er illustreret på Figur 17, hvor vi kan aflæse punktet $(1, 2)$ på grafen, gå 1 til højre og aflæse at vi skal gå 4 op for at ramme grafen igen i punktet $(2, 6)$. Dermed er $a = 4$, idet funktionsværdien stiger med 4, når x stiger fra 1 til 2. Det valgte startpunkt kan vælges frit. Vi vil også aflæse a til 4, når x stiger fra fx 2 til 3.



Figur 17: Aflæsning af a og b for en lineær funktion ud fra grafen.

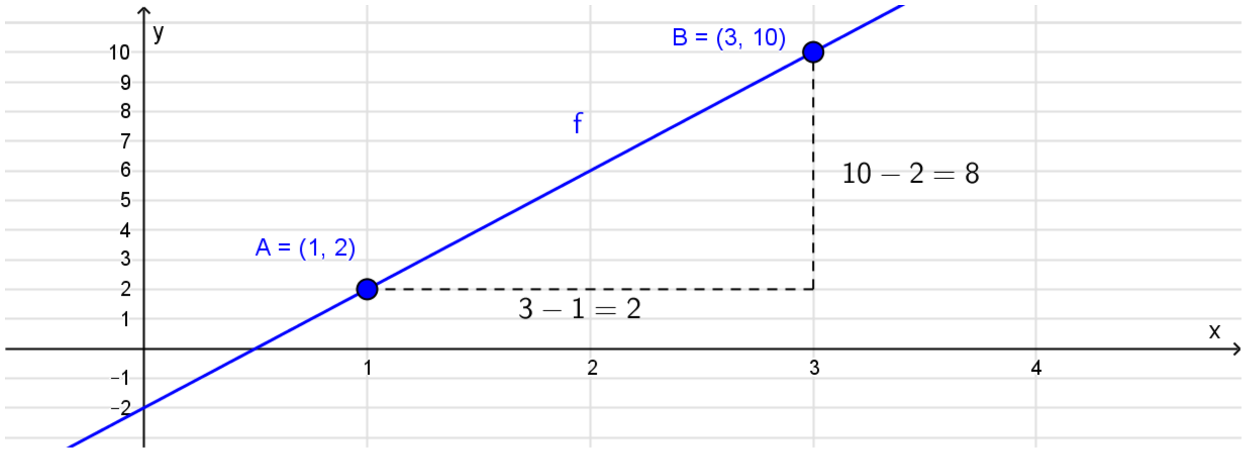
Vi har desuden fra tidligere, at grafen skærer y-aksen i $y = b$. Dermed kan vi bestemme konstantleddet b ved at aflæse punktet $(0, -2)$ på grafen. Dette giver os, at grafen skærer y-aksen i $y = -2$, og dermed er $b = -2$. Forskriften for f er da aflæst til $f(x) = 4x - 2$.

Vi vil nu se på, hvordan man beregner forskriften, hvis man kender to punkter, som grafen går gennem. Lad os antage, at grafen for den lineære funktion f går gennem punkterne $A = (1,2)$ og $B = (3,10)$. Vi har fra tidligere, at når x stiger med 1, så stiger funktionsværdien med a. For disse to punkter stiger 1. koordinaten med 2, når vi går fra A til B, og 2. koordinaten stiger med 8, hvilket er illustreret Figur 18. Dvs. funktionsværdien skal stige med 8, når x stiger med 2. Dette kan kun lade sig gøre, hvis $a = 4$ idet hvis funktionsværdien stiger med 4 når x stiger med 1, så stiger funktionsværdien med $4 \cdot 2 = 8$, når x stiger med 2.

Dermed har vi beregnet, at forskriften for f må se således ud: $f(x) = 4x + b$. For at bestemme b kan vi udnytte, at grafen går gennem punktet $A = (1,2)$. Det betyder nemlig, at funktionsværdien er 2, når $x = 1$, dvs. vi har at $f(1) = 2$. Ved at indsætte dette i forskriften får vi en ligning, hvor b kan isoleres:

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 \\ 4 \cdot 1 + b &= 2 \\ b &= 2 - 4 \\ b &= -2 \end{aligned}$$

Forskriften for f er da beregnet til $f(x) = 4x - 2$.



Figur 18: Beregning af hældningskoefficienten ud fra to punkter.

Måden vi beregnede hældningskoefficienten a på ovenfor fungerer kun, når punkterne er tilpas pæne. Generelt kan man beregne a ved at tage forskellen mellem de to punkters 2. koordinater og dividere med forskellen mellem de to punkters 1. koordinater (bevis i Appendiks 6). Denne fremgangsmåde kan vi også skrive op vha. det, vi kalder en formel. Til formlen har vi brug for at kunne angive et punkts 1. og 2. koordinat uden at sætte konkrete tal på, hvilket vi gør med skrivemåden $A = (x_1, y_1)$ og $B = (x_2, y_2)$ hvor det lille 1-tal (indeks) refererer til koordinaterne til det første punkt, mens det lille 2-tal refererer til koordinaterne til det andet punkt. (Hvis man vil læse teksten op, så siger man ”A er lig med x et komma y et”).

Vi kan bestemme a for den lineære funktion, hvor grafen går gennem punkterne $A = (x_1, y_1)$ og $B = (x_2, y_2)$ vha. ligningen

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

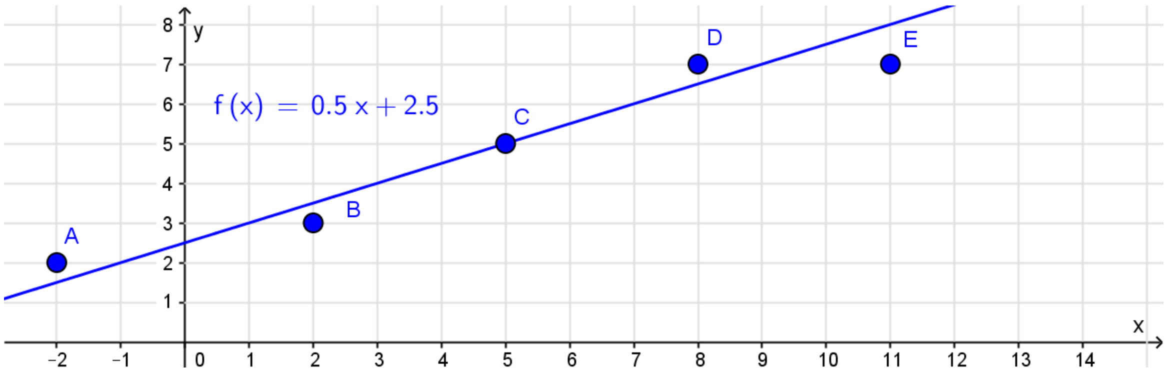
Denne ligning kaldes for topunktsformlen.

4.4. Den lineære model

I de naturvidenskabelige fag måler vi ofte en række målepunkter fra et forsøg, mens vi i samfundsfag indsamler data fra f.eks. en udvikling gennem en årrække. I begge situationer har vi et datasæt, som kan beskrives vha. to variable, x og y, og tilsammen giver disse x- og y-værdier os en række punkter, som beskriver en sammenhæng mellem x og y. Det kunne f.eks. være datasættet nedenfor som også ses på Figur 19 som punkterne A til E.

x	-2	2	5	8	11
y	2	3	5	7	7

Ofte er vi interesseret i at estimere[1] hvordan sammenhængen mellem x og y ser ud i andre punkter end dem vi har indsamlet ud fra en antagelse om, at der en underliggende sammenhæng mellem x og y. Det kunne f.eks. være, at vi var kommet frem til at den underliggende sammenhæng mellem x og y kan estimeres med den lineære funktion $f(x) = 0{,}5x + 2{,}5$, se Figur 19.



Figur 19: Lineær model på basis af en række punkter.

Med funktionen f kan vi nu estimere, hvad y er, når f.eks. $x = 3$. Funktionsværdien kan vha. forskriften beregnes til $f(3) = 4$, og dermed estimerer vi, at $y = 4$ når $x = 3$. Tilsvarende kan vi udregne $f(14) = 9{,}5$ og estimerer derfor, at $y = 9{,}5$ når $x = 14$. I den første situation, hvor det estimerede punkt ligger mellem målepunkterne, er vi typisk ret sikker på vores estimat. I den anden situation, hvor det estimerede punkt ligger uden for målepunkterne, kan vi risikere, at den underliggende sammenhæng mellem x og y ændrer karakter uden for målepunkterne og vores estimat ligger langt fra den underliggende sammenhæng.
Når vi bruger en lineær funktion på denne måde, kaldes funktionen en lineær model, idet den giver os en model for den underliggende sammenhæng mellem x og y. Generelt kaldes en funktion for en *matematisk model*, når vi bruger en funktion til at beskrive virkeligheden.
Som man kan se på Figur 19, passer vores lineære model $f(x) = 0{,}5x + 2{,}5$ ikke helt overens med punkterne A til E, og det ser heller ikke ud til, at en anden lineær funktion vil kunne beskrive punkterne perfekt. I de naturvidenskabelige fag skyldes dette typisk, at den underliggende sammenhæng mellem x og y er lineær, men at måleusikkerheder i forbindelse med indsamlingen af målepunkter gør, at punkterne afviger fra denne sammenhæng. Hvorimod vi i samfundsfag typisk har den situation, at den underliggende sammenhæng mellem x og y ikke er lineær eller en anden gængs funktionstype.

Til at vurdere afvigelsen mellem modellen og et punkt har vi to begreber: absolut afvigelse og relativ afvigelse. Den *absolutte afvigelse* er den lodrette afstand mellem grafen og punktet. F.eks. er den absolutte afvigelse mellem f og punktet $D = (8{,}7)$ fra Figur 19 lig med

$$7 - f(8) = 7 - 6{,}5 = 0{,}5.$$

Den absolutte afvigelse fortæller os direkte, hvor stor forskel der er på den estimerede værdi fra modellen og den målte værdi.

[1] At estimere betyder at tillægge noget en bestemt værdi uden at man har en metode hvormed man kan sikre at værdien kommer tilpas tæt på den sande værdi. Med andre ord så giver man et bud på, hvad værdien er.

Der er to forskellige måder at definere den relative afvigelse afhængig af om det er afvigelsen i forhold til den målte værdi eller den estimerede værdi fra modellen som man mener er relevant. I de naturvidenskabelige fag vil man typisk se på afvigelsen i forhold til den estimerede værdi fra modellen hvor man i samfundsfag typisk vil se på afvigelsen i forhold til den målte værdi.

De naturvidenskabelige fag:
Den *relative afvigelse* (i forhold til den estimerede værdi) er hvor stor en andel den lodrette afstand mellem grafen og punktet udgør af den lodrette afstand mellem x-aksen og grafen. F.eks. er den relative afvigelse mellem f og D lig med

$$\frac{7 - f(8)}{f(8)} = \frac{7 - 6{,}5}{6{,}5} = 0{,}08 = 8\%$$

Den relative afvigelse fortæller os, hvor stor en procentdel forskellen mellem den estimerede værdi og den målte værdi udgør af den estimerede værdi. Man kan bruge denne formel til at bestemme den:

$$\frac{y_{\text{målt}} - y_{\text{model}}}{y_{\text{model}}}$$

men hvis man får et negativt tal, så skal man fjerne minus idet afvigelsen her er et positivt tal.

Samfundsfag:
Den *relative afvigelse* (i forhold til den målte værdi) er hvor stor en andel den lodrette afstand mellem grafen og punktet udgør af den lodrette afstand mellem x-aksen og punktet. F.eks. er den relative afvigelse mellem f og D lig med

$$\frac{7 - f(8)}{7} = \frac{7 - 6{,}5}{7} = 0{,}07 = 7\%$$

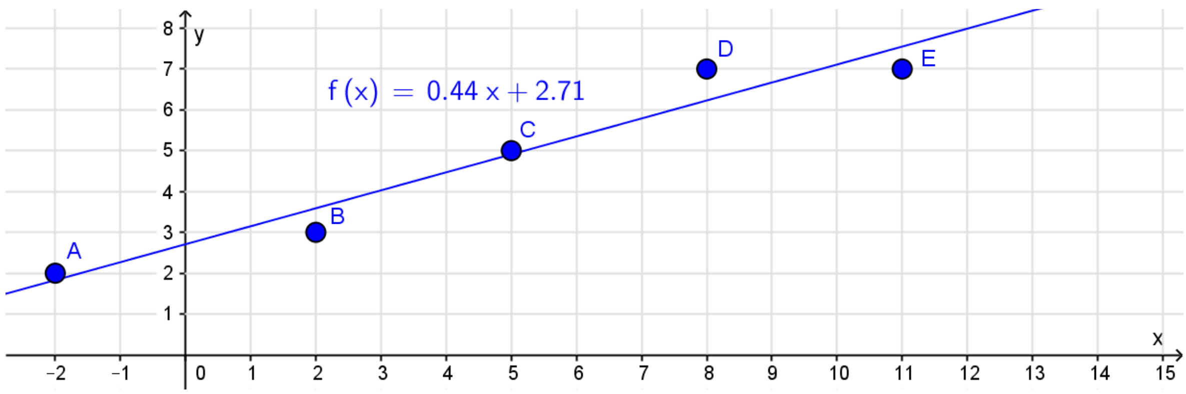
Den relative afvigelse fortæller os, hvor stor en procentdel forskellen mellem den estimerede værdi og den målte værdi udgør af den målte værdi. Man kan bruge denne formel til at bestemme den:

$$\frac{y_{\text{målt}} - y_{\text{model}}}{y_{\text{målt}}}$$

men hvis man får et negativt tal, så skal man fjerne minus idet afvigelsen her er et positivt tal.

4.5. Lineær regression

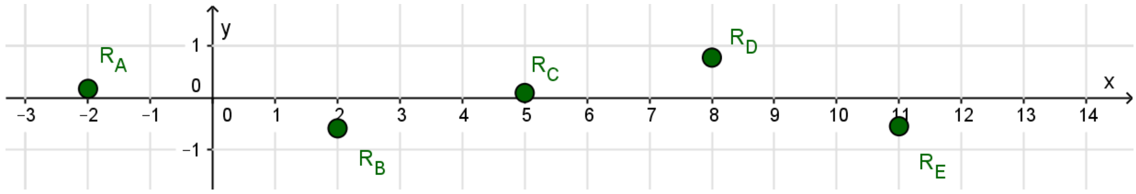
Hvis vi vil bestemme den lineære model, som bedst beskriver sammenhængen mellem to variable, x og y, ud fra en række punkter, skal vi bestemme forskriften for den lineære funktion, som bedst beskriver punkterne. Dette kaldes for *lineær regression.* På Figur 20 ses grafen for den lineære funktion $f(x) = 0{,}44x + 2{,}71$, som bedst beskriver punkterne A til E (de samme punkter som blev brugt ovenfor).



Figur 20: Lineær regression med en række punkter.

Grafen for f kaldes den bedste rette linje til punkterne og er løst sagt den rette linje, hvor den samlede afstand mellem punkterne og linjen bliver mindst mulig. f bestemmes typisk vha. et matematikprogram ved det der kaldes "mindste kvadraters metode", og du vil på et senere tidspunkt i dit matematikforløb komme til at beskæftige dig mere formelt med metoden.

En måde at illustrere afstandene mellem punkterne og en given lineær funktion er ved at tegne et *residualplot*. På Figur 21 er residualplottet til punkterne A til E og funktionen f angivet.



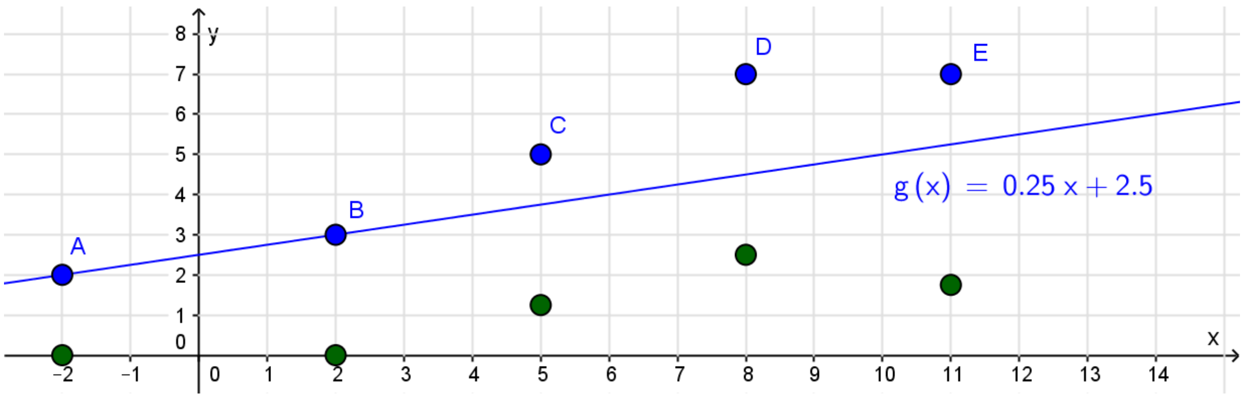
Figur 21: Residualplot hørende til Figur 20.

Punkterne i residualplottet, som kaldes *residualpunkter*, har samme 1. koordinat som punkterne A til E, mens 2. koordinaten til f.eks. R_A er givet ved afvigelsen mellem 2. koordinaten til punktet $A = (-2{,}2)$ og funktionsværdien af f når $x = -2$:

$$2 - f(-2) = 2 - 1{,}84 = 0{,}16$$

Dermed er $R_A = (-2; 0{,}16)$ og på samme måde kan vi bestemme koordinatsættet til de andre punkter: $R_B = (2; -0{,}58)$, $R_C = (5; 0{,}11)$, $R_D = (8; 0{,}81)$ og $R_E = (11; -0{,}50)$.
Bemærk at punkterne under x-aksen på residualplottet svarer til punkter placeret under grafen for f. På residualplottet kan vi desuden aflæse, at punktet D har den største absolutte afvigelse fra f, og vha. koordinatsættet til R_D aflæses, at afgivelsen er på $0{,}81$. Afvigelsen kaldes også for *residualet* til punktet D.

Det næste, vi skal se på, er en undersøgelse af, hvilken af to lineære funktioner som passer bedst til en række punkter. Konstruerer vi f.eks. en lineær funktion g, hvis graf går gennem de to første punkter, A og B, se Figur 22, kan vi konstatere, at selvom residualpunkterne hørende til A og B ligger perfekt på x-aksen, ligger de øvrige residualpunkter væsentligt længere fra x-aksen således, at funktionen g samlet set ikke beskriver punkterne særlig godt.



Figur 22: Lineær funktion gennem A og B sammen med residualplot.

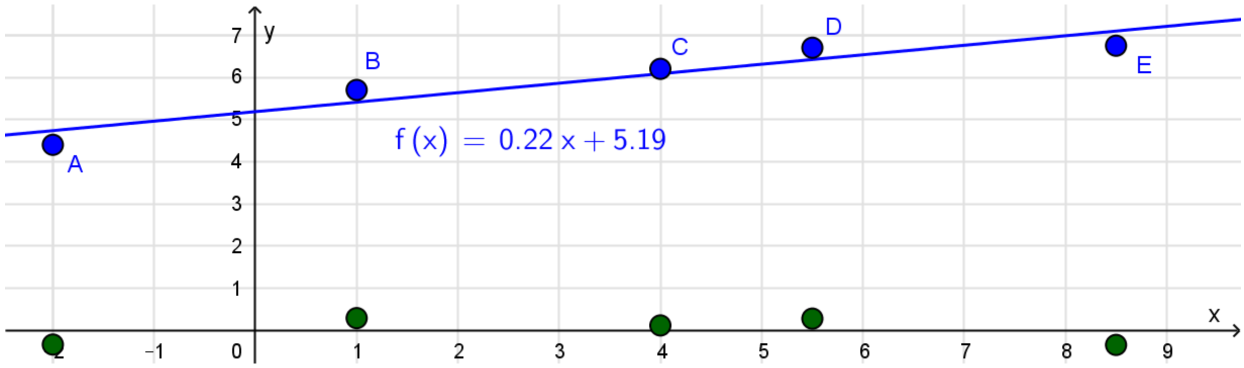
Ved funktionen f var den maksimale absolutte afvigelse på 0,81, mens vi på Figur 22 kan se, at den for g er over 2 og derudover er den absolutte afvigelse for punkterne C, D og E over 1.

Vi har også et samlet mål for, hvor godt en funktion beskriver en række punkter. Dette tal kaldes *summen af kvadraterne* og fås ved at tage de absolutte afvigelser opløftet i anden og lægge disse værdier sammen. Ud fra residualpunkterne til f i figur 20 ovenfor, kan vi aflæse de absolutte afvigelser til: 0,16; 0,58; 0,11; 0,81 og 0,50. Dermed er summen af kvadraterne for funktionen f givet ved:

$$0{,}16^2 + 0{,}58^2 + 0{,}11^2 + 0{,}81^2 + 0{,}50^2 = 1{,}28$$

Jo mindre summen af kvadraterne er, jo bedre passer funktionen til punkterne. For funktionen g er summen af kvadraterne 10,88. Det bekræfter altså, at funktionen f beskriver punkterne A til E bedre end funktionen g.

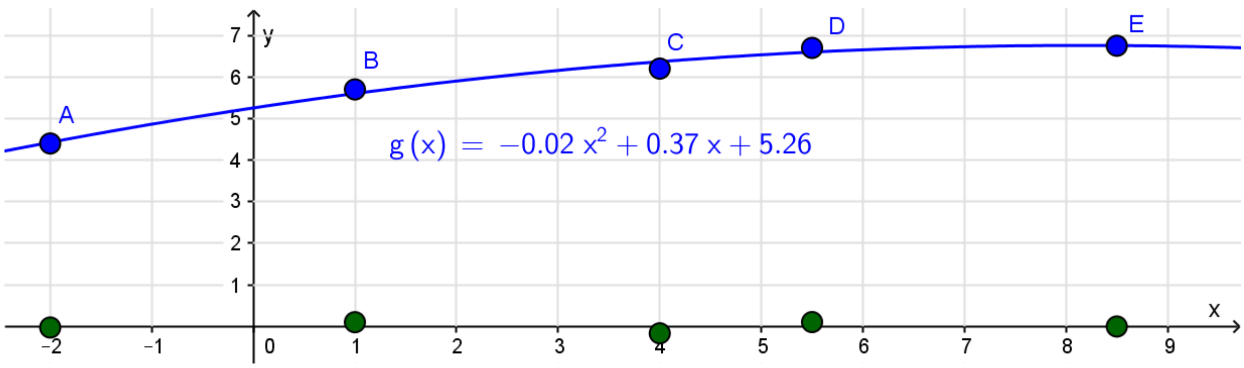
At summen af kvadraterne er lille, kan dog ikke alene bruges som argument for, at en lineær funktion er den funktionstype, der bedst beskriver en række punkter. Der skal også vurderes om punkterne er fordelt tilfældigt i forhold til grafen for funktionen.
På Figur 23 ses fem nye punkter, A til E, hvor den lineære funktion der bedst beskriver punkterne, $f(x) = 0{,}22x + 5{,}19$, ikke er den optimale funktionstype.



Figur 23 : Eksempel hvor den lineære funktion ikke beskriver punkterne bedst.

Det kan bl.a. begrundes i, at punkterne ikke er fordelt tilfældigt i forhold til grafen for f. Det ses at punkterne i enderne ligger under grafen, mens punkterne i midten alle ligger over grafen. Dermed er punkterne ikke fordelt tilfældigt i forhold til grafen, hvorfor der måske findes en anden funktionstype, der bedre beskriver punkterne. Det til trods for, at summen af kvadraterne for f kun er $0{,}41$.

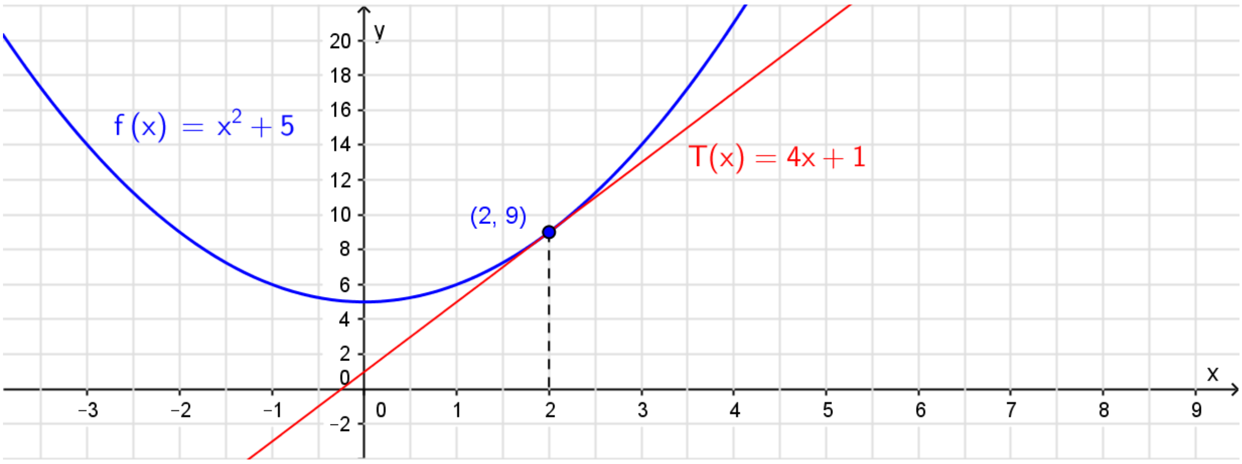
Hvis vi i stedet for benytter funktionen $g(x) = -0{,}02x^2 + 0{,}37x + 5{,}26$, se Figur 24, som model for punkterne, fås en bedre beskrivelse af punkterne. Punkterne er fordelt mere tilfældigt omkring grafen og tættere på grafen. Det sidste ses tydeligst i residualplottet, og bekræftes af at summen af kvadraterne er $0{,}05$. Vi ser mere på regression med andre funktionstyper i Kapitel 6.



Figur 24: Eksempel hvor en anden funktionstype beskriver punkterne bedre end den lineære funktion.

5. Tangent og væksthastighed

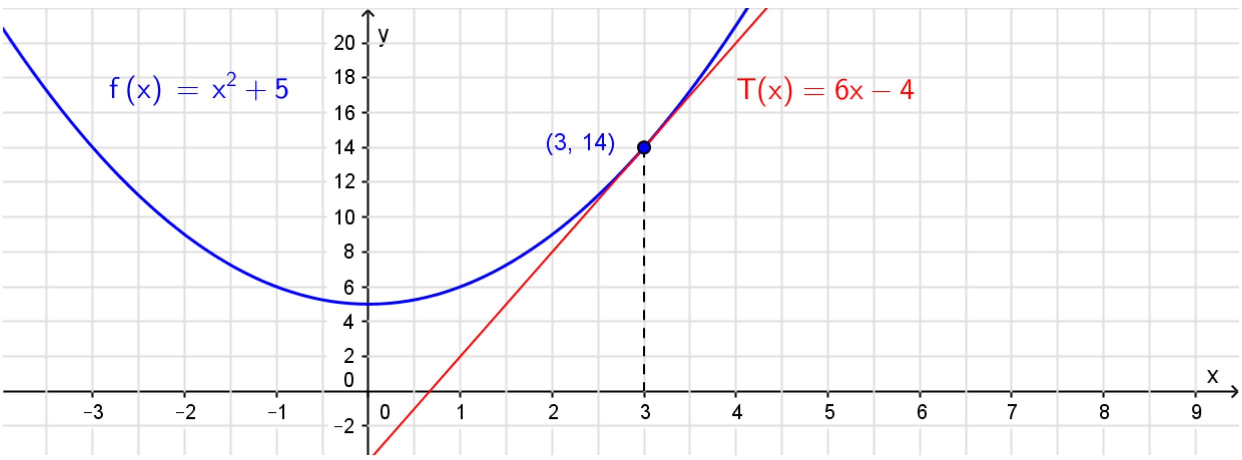
I dette kapitel vil vi bruge lineære funktioner til at beskrive hvor meget andre, mere komplicerede, funktioner vokser eller aftager. Dette gør vi ved at bestemme den lineære funktion T, som bedst beskriver vores funktion f ved en given x-værdi. På Figur 25 ses grafen for den lineære funktion $T(x) = 4x + 1$ som bedst beskriver funktionen $f(x) = x^2 + 5$ når $x = 2$.



Figur 25: Tangenten til en funktion.

Grafen for T kaldes *tangenten* til f når $x = 2$, og er løst sagt den rette linje hvor afstanden mellem linjen og grafen for f hurtigst går mod nul når vi nærmer os $x = 2$. Indtil videre vil vi bruge et matematikprogram til at beregne forskriften for tangenten, men på et senere tidspunkt i dit matematikforløb skal du arbejde med, hvordan man beregner tangenten i hånden. Vi kan dog allerede nu beregne at tangenten må gå gennem punktet $(2{,}9)$ idet $f(2) = 2^2 + 5 = 9$.
Ligesom vi aflæser punkter på en graf, kan vi også komme med et bud på tangenten ved at tegne en ret linje som flugter med grafen for funktionen.
Ud fra forskriften $T(x) = 4x + 1$ kan vi se, at tangentens hældningskoefficient er 4, og fra tidligere har vi, at dette betyder, at når x stiger med 1, så stiger funktionsværdien med 4. Dette giver os et mål for hvor meget f vokser med i nærheden af $x = 2$, idet grafen for f, og tangenten er meget tæt på hinanden i nærheden af $x = 2$.

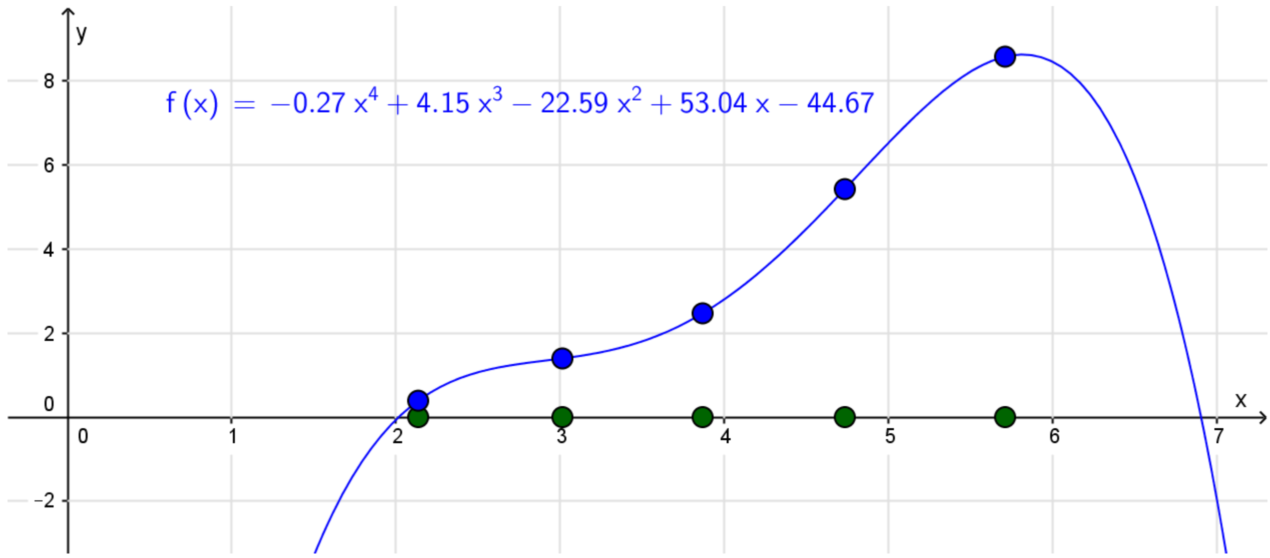
Vi kalder tangentens hældningskoefficient for *væksthastigheden* af f, og her har vi, at væksthastigheden af f er 4 når $x = 2$. På Figur 26 ses tangenten til f når $x = 3$, og vi kan se at væksthastigheden af f er 6 når $x = 3$. Ved at se på grafen for f kunne vi allerede se at f vokser hurtigere omkring $x = 3$ end den gør ved $x = 2$, så væksthastigheden giver os et tal, som beskriver, hvor meget hurtigere den vokser.



Figur 26: Tangenten i et nyt punkt.

6. Regression med andre funktionstyper

I dette kapitel vil vi se på regression med andre funktionstyper end den lineære funktion, dvs. vi vil se på bestemmelsen af en konkret funktion inden for en given funktionstype, der bedst beskriver en række punkter. Typisk vil vi overlade arbejdet med at udføre regressionen til et matematikprogram, og vores opgave bliver i stedet at bestemme, hvilken funktionstype der er mest hensigtsmæssig at benytte. I de naturvidenskabelige fag vil der tit være nogle teoretiske argumenter for, at vi skal benytte en bestemt funktionstype til at modellere sammenhængen mellem x og y, men vi vil her se på, hvad man gør, når dette ikke er tilfældet.
På Figur 27 ses fem punkter som er beskrevet vha. funktionen $f(x) = -0{,}27x^4 + 4{,}15x^3 - 22{,}59x^2 + 53{,}04x - 44{,}67$ som hører til funktionstypen der indeholder alle funktioner med forskrift på formen $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$. Det ses, at funktionen passer perfekt til punkterne, hvilket også fremgår af residualplottet. På den anden side, så er f en relativ kompliceret funktion med fem konstanter, a, b, c, d og e, hvilket gør det svært at karakterisere funktionen og dermed sammenhængen mellem x og y.



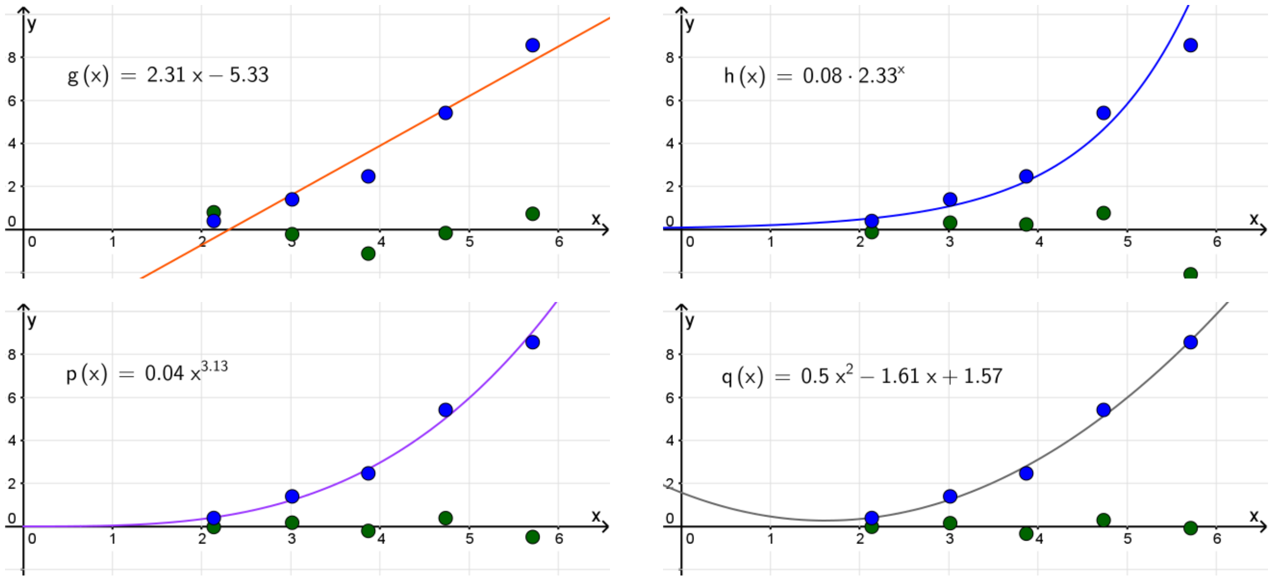
Figur 27: Regression vha. funktionstypen $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$.

Når vi skal vælge, hvilken funktionstype vi vil benytte til at modellere sammenhængen mellem x og y, er det en opvejning af, hvor tæt funktionen skal være på punkterne, og hvor kompliceret funktionen skal være. Dvs. vi vil gerne have en funktion, som beskriver punkter godt og er nem at karakterisere. Derudover så skal funktionen som model af virkeligheden give mening. Hvis f.eks. y er en fysisk størrelse, som ikke kan antage negative værdier, så må funktionsværdien ikke være negativ. Dette problem kan nogle gange løses ved at begrænse definitionsmængden.
Indtil videre har vi arbejdet med lineære funktioner, $g(x) = a \cdot x + b$, og senere hen i matematik-undervisningen vil vi bl.a. komme til at arbejde med de tre funktionstyper:

eksponentielle funktioner:	$h(x) = b \cdot a^x$
potensfunktioner:	$p(x) = b \cdot x^a$
andengradspolynomier:	$q(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

og lære at karakterisere dem.

På Figur 28 er der udført regression med disse funktionstyper og det ses at funktionerne p og q passer bedst til punkterne, idet residualplottene giver en række punkter, som er fordelt tilfældet omkring x-aksen. Summen af kvadraterne for funktionerne p og q er hhv. $0{,}46$ og $0{,}23$. Vi kan dog ikke alene bruge dette som argument for at vælge q fremfor p. Dermed må vi, uden yderligere viden om sammenhængen mellem x og y, konkludere at funktionerne p og q begge er hensigtsmæssige til at modellere sammenhængen.



Figur 28: Regression med forskellige funktionstyper.

Begrebsliste

Absolut afvigelse

Afhængig variabel

Aftagende (funktion)

Definitionsmængde

Forskrift

Funktionsværdi

Graf

Hældningskoefficient

Konstant (funktion)

Konstantled

Koordinatsystem

Koordinatsæt

Kvadrant

Ligning

Lineær funktion

Lineær regression

Lodret asymptote

Lokalt maksimum

Lokalt minimum

Maksimum

Matematisk model

Minimum

Monotoniforhold

Parallelle (linjer)

Proportional funktion

Proportionalitetsfaktor

Punkt

Relativ afvigelse

Residualplot

Rod

Summen af kvadraterne

Uafhængig variabel

Vandret asymptote

Voksende (funktion)

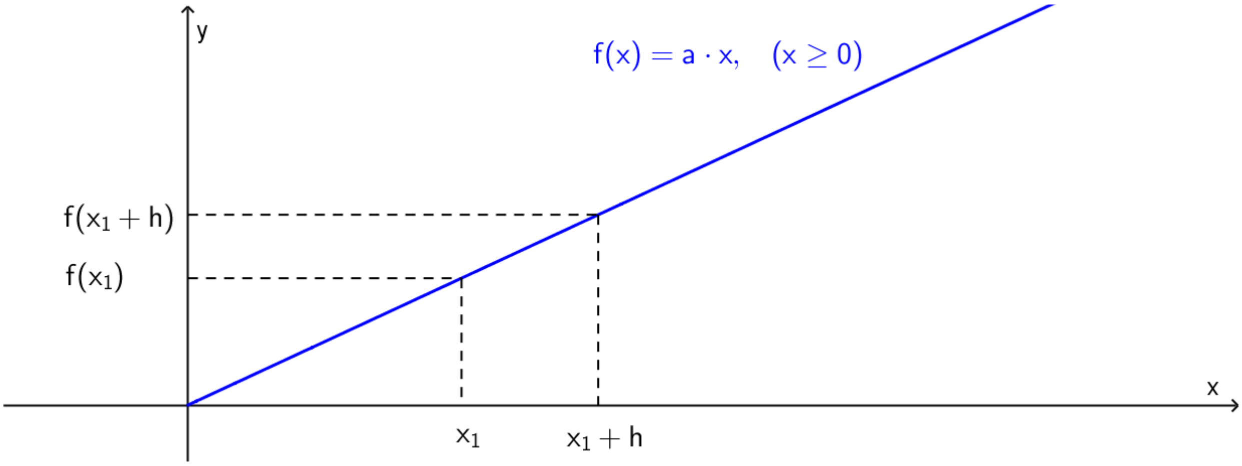
Værdimængde

1. koordinat

2. koordinat

Appendiks 1: Monotoniforhold for en proportional funktion

Vi vil her bevise, at den proportionale funktion $f(x) = a \cdot x$ er voksende for $a > 0$.
Vi starter med en x-værdi på x_1 og undersøger derefter hvad der sker med funktionsværdien når x-værdien stiger til $x_1 + h$, hvor $h > 0$, se Figur 29.



Figur 29: Undersøgelse af monotoniforholdene for en proportional funktion.

Ved at bruge forskriften får vi at

$$\begin{aligned} f(x_1 + h) &= a \cdot (x_1 + h) \\ &= a \cdot x_1 + a \cdot h \\ &= f(x_1) + a \cdot h, \end{aligned}$$

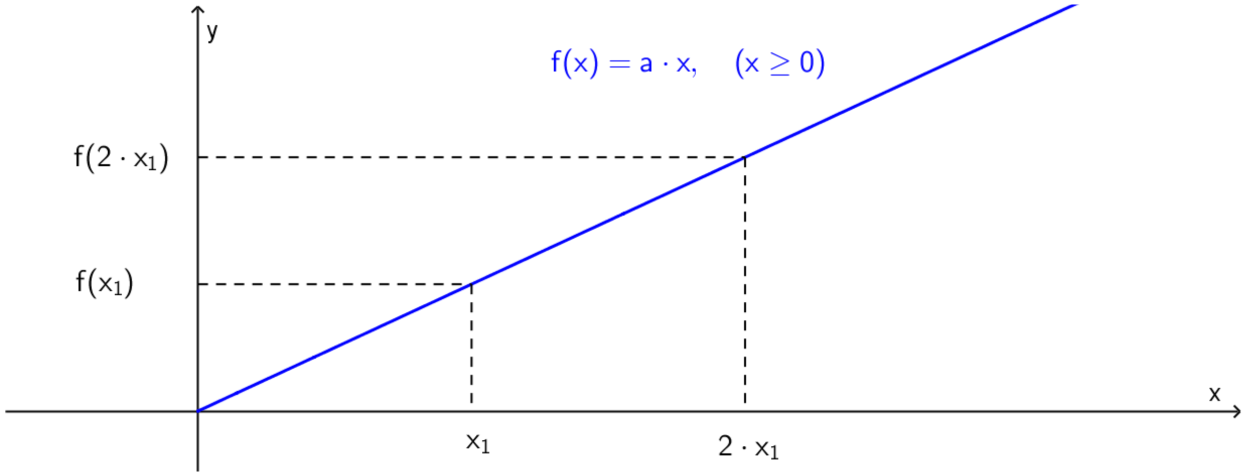
og dette medfører at når x stiger fra x_1 til $x_1 + h$, så stiger funktionsværdien fra $f(x_1)$ til $f(x_1) + a \cdot h$. Da $a > 0$ og $h > 0$ er produktet $a \cdot h > 0$, og dermed stiger funktionsværdien. Da dette gælder for alle værdier af x_1 og h, er den proportionale funktion voksende på hele dens definitionsmængde.

Appendiks 2: Betydningen af a for en proportional funktion

Vi vil her bevise at for en proportionale funktion $f(x) = a \cdot x$ stiger funktionsværdien med a når x stiger med 1.
Fra Appendiks 1 har vi at når x stiger fra x_1 til $x_1 + h$, så stiger funktionsværdien fra $f(x_1)$ til $f(x_1) + a \cdot h$. Ved at sætte $h = 1$ får vi at når x stiger fra x_1 til $x_1 + 1$, så stiger funktionsværdien fra $f(x_1)$ til $f(x_1) + a \cdot 1 = f(x_1) + a$. Da dette gælder for alle værdier af x_1, har vi, at når x stiger med 1, så stiger funktionsværdien med a.

Appendiks 3: Karakteristik af en proportional funktion

Vi vil her bevise, at for en proportionale funktion $f(x) = a \cdot x$ fordobles funktionsværdien, når x fordobles. Vi starter med en x-værdi på x_1 og undersøger hvad der sker med funktionsværdien, når x-værdien fordobles til $2 \cdot x_1$, se Figur 30.



Figur 30: Undersøgelse af funktionsværdien af en proportional funktion når x fordobles.

Ved at indsætte $2 \cdot x_1$ i stedet for x i forskriften får vi at

$$\begin{aligned} f(2 \cdot x_1) &= a \cdot 2 \cdot x_1 \\ &= 2 \cdot a \cdot x_1 \\ &= 2 \cdot f(x_1), \end{aligned}$$

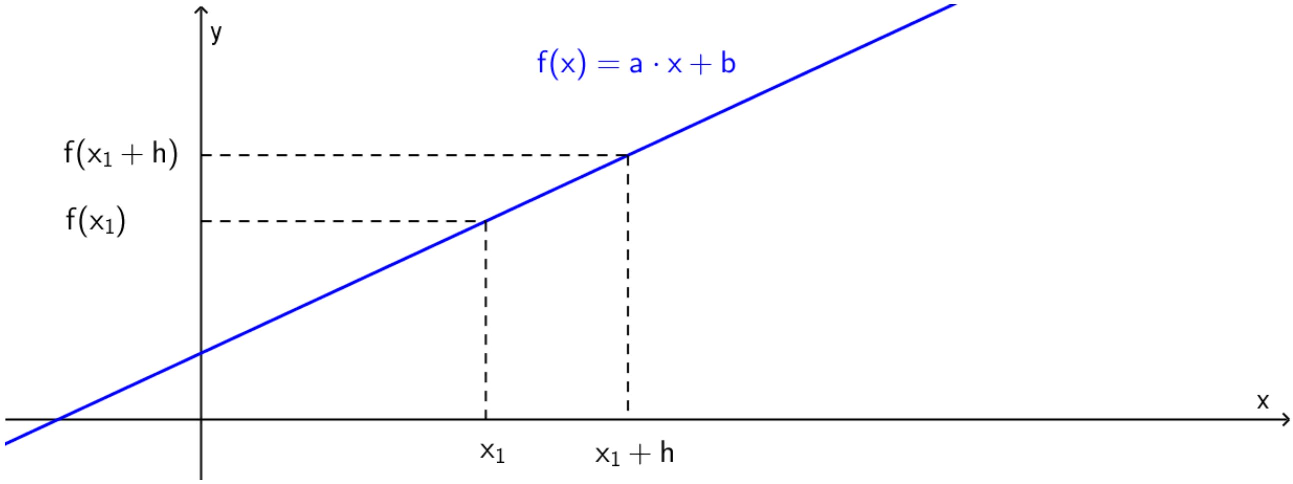
og dette betyder, at når x fordobles fra x_1 til $2 \cdot x_1$, så fordobles funktionsværdien fra $f(x_1)$ til $2 \cdot f(x_1)$. Da dette gælder for alle værdier af x_1, har vi, at når x fordobles, så fordobles funktionsværdien.

Appendiks 4: Monotoniforhold for en lineær funktion

Vi vil her bevise monotoniforholdene for en lineær funktion $f(x) = a \cdot x + b$:

$a < 0$: aftagende
$a = 0$: konstant
$a > 0$: voksende.

Vi starter med en x-værdi på x_1 og undersøger derefter hvad der sker med funktionsværdien når x-værdien stiger til $x_1 + h$, hvor $h > 0$, se Figur 31.



Figur 31: Undersøgelse af monotoniforholdene for en lineær funktion.

Ved at indsætte $x_1 + h$ på x's plads i forskriften får vi at

$$\begin{aligned} f(x_1 + h) &= a \cdot (x_1 + h) + b \\ &= a \cdot x_1 + a \cdot h + b \\ &= a \cdot x_1 + b + a \cdot h \\ &= f(x_1) + a \cdot h, \end{aligned}$$

og dette medfører, at når x stiger fra x_1 til $x_1 + h$, så ændres funktionsværdien fra $f(x_1)$ til $f(x_1) + a \cdot h$. Hvis $a < 0$, så har vi at produktet $a \cdot h < 0$ (vi ved $h > 0$), og dermed falder funktionsværdien. Hvis $a = 0$, så har vi at produktet $a \cdot h = 0$, og dermed er funktionsværdien konstant. Hvis $a > 0$, så har vi at produktet $a \cdot h > 0$, og dermed stiger funktionsværdien. I alle tilfælde gælder resultatet for alle værdier af x_1 og h, og dermed gælder monotoniforholdene på hele den lineære funktions definitionsmængde.

Appendiks 5: Betydningen af a for en lineær funktion

Vi vil her bevise at funktionsværdien for en lineære funktion $f(x) = a \cdot x + b$ stiger med a når x stiger med 1.

Fra Appendiks 4 har vi, at når x stiger fra x_1 til $x_1 + h$, så ændres funktionsværdien fra $f(x_1)$ til $f(x_1) + a \cdot h$. Ved at sætte $h = 1$ får vi, at når x stiger fra x_1 til $x_1 + 1$, så ændres funktionsværdien fra $f(x_1)$ til $f(x_1) + a \cdot 1 = f(x_1) + a$. Da dette gælder for alle værdier af x_1, har vi at når x stiger med 1, så stiger funktionsværdien med a.

Appendiks 6: Topunktsformlen for en lineær funktion

Vi vil her bevise, at en lineær funktion $f(x) = a \cdot x + b$ vis graf går gennem punkterne $A = (x_1, y_1)$ og $B = (x_2, y_2)$ har en hældningskoefficient a som er givet ved

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Situationen er illustreret på Figur 32. Her ses, at hvis grafen for f går gennem punktet A, så må punktets 2. koordinat, y_1, og funktionsværdien af f, $f(x_1)$ være lig hinanden: $y_1 = f(x_1)$. Ved at bruge forskriften får vi ligningen $y_1 = a \cdot x_1 + b$. Ligeledes giver punktet B os ligningen $y_2 = a \cdot x_2 + b$. For at bestemme a isolerer vi først b i ligningen $y_1 = a \cdot x_1 + b$:

$$y_1 = a \cdot x_1 + b$$

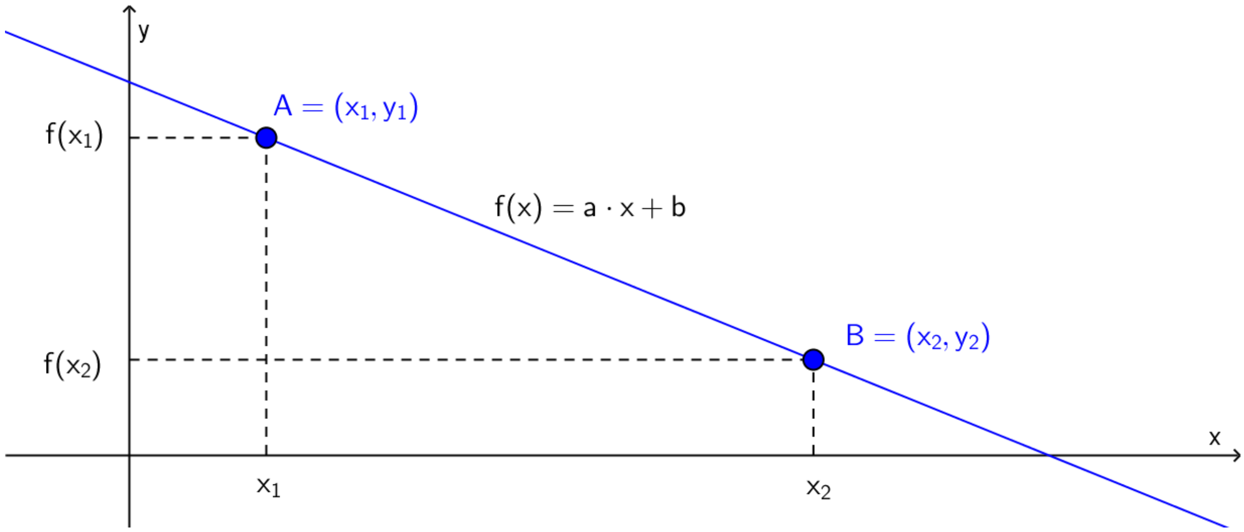
$$y_1 - a \cdot x_1 = b.$$

Dette udtryk for b indsætter vi derefter i ligningen $y_2 = a \cdot x_2 + b$, og derefter isolerer vi a:

$$y_2 = a \cdot x_2 + (y_1 - a \cdot x_1)$$
$$y_2 - y_1 = a \cdot x_2 - a \cdot x_1$$
$$y_2 - y_1 = a \cdot (x_2 - x_1)$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a.$$

Ovenfor har vi brugt parentesregnereglen $a \cdot (x_2 - x_1) = a \cdot x_2 - a \cdot x_1$. Dermed kan $a \cdot x_2 - a \cdot x_1$ omskrives til $a \cdot (x_2 - x_1)$. Vi har dermed formlen $a = \frac{y_2 - x_1}{x_2 - x_1}$ for hældningskoefficienten af en lineær funktion.



Figur 32: To vilkårlige punkter og en lineær funktion som går gennem dem.